応用解析学（電子２年）　　第１講

担当：鶴 (tsuru@cse.kyutech.ac.jp)

- 解析数学のリハビリ（復習・確認）
- 小レポート課題出題

はじめに

講義の目標

工学的な問題の解決において，対象となる現象やシステムを関数，ベクトル，微分・積分のような数学解析的手法を用いてモデル化し，その性質を調べることが重要になる．本講義では，そのために必要な基本的な考え方や計算技術を学ぶ．実は解析数学が活躍する応用数学分野の例として「確率論」がある．

高校までの解析数学では，一次式，べき乗，有理関数，べき乗根， 三角・指数・対数関数などの基本的な関数（表現・計算のために必要）の性質を学んだ．しかし，より複雑な問題を扱う場合，そのような基本的な関数を使って直接対象を表現できないことも多く，積分や無限和，あるいは満たすべき方程式を介して定義したり近似したりする必要が生じる．そこで大学では，複雑な量や量の間の関係 (関数) の性質を調べるために，様々な近似や極限を扱う手法を学ぶ．それには式の計算 (変形) や不等式（大小関係の評価）が欠かせない．

本講義の前半は，高校や大学初年度の復習を兼ねて，基礎的な解析的計算の練習を行い，後半では，**偏微分方程式**や**フーリエ級数**などの進んだトピックスを取り上げ，基礎的な計算を巧妙に適用することで導かれる様子を理解する．

- **２階線形偏微分方程式**は，熱の伝導や波の伝播を（近似的に）表現する，物理現象にとって基本的で重要なものである．

  空間内の個々の位置での個々の時刻での状態を記述するために２種類の変数（位置と時刻）が必要である．物理現象における隣接位置や時間経過に伴う状態の違い（変化）に関する性質を，多変数関数の各変数の向きでの微分（偏微分）によって表現する．

- **フーリエ級数**は，大雑把に言えば，任意の１変数実関数を，様々な周波数の三角関数（$\sin nx$; $\cos nx$, $n = 1, 2, \ldots$）の重みつきの和で近似するものである．

  本講義では偏微分方程式の初期値境界値問題を解く道具として導入するが，他にも工学の様々な分野で応用される．複素数を用いる「**フーリエ変換**」の基礎でもある．

講義の最終段階での例題として，

- 回りが固定された薄い弾力性を持つ円形の膜（例えば太鼓の表面など）のある一部分を少しだけ指で押して，そっと離した後の，膜の変位の時間変動（振動）を関数の組み合わせによって表現する．

という問題がある．授業で扱うような例題は，いろんな単純な「仮定」を置いているので，それを解くこと自体が現実問題を解決するわけではないが，この解法に至る過程で様々な面白い計算技法や考え方（証明）が現れるので，楽しむ気持ちでチャレンジしてくれることを期待します．それらの「考え方」は，進級し卒論などで各専門分野の問題を扱うときにも役に立つはずである．

一方，現実問題を偏微分方程式でモデル化して具体的にその解の値を求める場合は，**数値解析（数値計算）**という種類の技術（差分法，有限要素法，境界要素法等）を使う必要がある．これらは，自分が進んだ専門分野において必要ならばそこで学ぶ（**本講義では扱わない**）．

数学を,「ひらめきがないと理解できないもの」と思っている人が居るかも知れないが，実はそれは逆である．最初にその理論を作り上げた人は天才であるが，それを学び，慣れ，使う我々は，決まった筋道に沿って計算や論証をしていけば，天才でなくても答えに辿り着く．これをよく「式が代わって考えてくれる」と表現する．小学校の時の，つるかめ算から連立方程式への進化を思い出してほしい．このように「ひらめきがなくても問題が解ける」ようにするために,「面倒な」記号や記法を準備するのである．

授業の進め方（シラバス参照）

- 資料（プリント）配付.
  - 電子版：`http://nmlab.cse.kyutech.ac.jp/teaching/?lang=ja` の応用解析学.

  資料内の「$\boxed{\text{練習}}$」は復習用として必ず次回までに解いて来て下さい．その次の授業で時間の許す範囲で簡単に解答・解説する．ただし，出席確認も兼ねて，数回はこれを「小レポート」として次の週の授業で提出してもらいます（用紙は A4，形式は自由，氏名・学生番号を忘れない）．
- 中間評価レポート（出題から回収までの期間は 2 週間程度取る）によって前半のまとめと部分評価を行う．期末試験によって前半・後半の総合評価を行う．

授業中の携帯電話禁止，マナーモードにすること．なお，休講が入る場合は，どこかで補講を行う．

「数学」は，自分の手で紙と鉛筆を使って計算し追体験して納得するのが，唯一の理解方法である．面倒でも一度計算をやってみる．授業時間内に資料の中身や話す内容をすべて理解し，計算の詳細を追体験することは不可能に近いので，**必ず復習すること．資料を読み，例題や練習問題は自分でノートに解いてみて下さい．**

資料の間違いを見つけた人は授業中でもメールでもいいので指摘して下さい．

一方，白板に書くことは大体資料にも書いてあるので，**それを丸写しする必要はない．ただし，資料に書ききれないことをポンチ絵や言葉で補うので，それを見逃さない，聞き逃さないようにして下さい．**

発展的参考書（必須ではありません）をいくつか挙げる．(1) は本講義の前半（偏微分方程式より前）と関係する気楽に読める入門書．他の３つは，本講義の後半（偏微分方程式，フーリエ級数）の詳細も含んだ古典的名著で，私も 40 年前の大学時代に学んだ．ただし最後の１つは絶版．本講義の題材の多くは，これらから借用している．本講義の配布資料はそれだけで閉じて理解できるように詳しく書いているので，参考書の購入が必要なわけではない．講義の先にあるより厳密な・進んだ内容に興味を持ち，かつ時間に余裕のある人は，是非本屋で見つけて眺めてみて下さい（大学時代にしかできない優雅な遊び）．

(1) オイラーの贈物；吉田 武史；ちくま学芸文庫

(2) 大学演習応用数学 1； 吉田 耕作, 加藤 敏夫； 裳華房

(3) ルベーグ積分；溝畑 茂；岩波全書

(4) 物理数学の方法；ローラン・シュワルツ著，吉田耕作他訳；岩波全書

1．解析数学のリハビリ

リハビリを兼ねて，１年生の「解析」やさらに遡って高校の関数や微分積分の範囲からの復習を行う．一度は必ず自力で解いてみること．なお，e はネイピア数で，$e = 2.718\cdots$．自然対数 $\log x$ は e を底とする対数なので,（トートロジーですが）e は「自然対数の底」とも呼ばれる．

○べき乗と指数の復習

実数 a に対して，以下の定義を復習する．

＜1＞ n を整数として，a^n, $a^{\frac{1}{n}}$

＜2＞ r を実数として，a^r

＜3＞ i を虚数単位として，a^i

まず，本資料では，$A \stackrel{\text{def}}{=} B$ は，左辺の記号 A を右辺の既に定義されたもの（式や数）B で定義する，という意味で使う．

1＞ n を整数として，a^n, $a^{\frac{1}{n}}$

– a^n は，$a^1 \stackrel{\text{def}}{=} a$，$n = 2, 3, \ldots$ に対して，$a^n \stackrel{\text{def}}{=} a^{n-1} \times a$ で定義される．
  この漸化式が $n = 1$ でも成り立つように，

* $a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$

  任意の数の 0 乗を 1 として定義した人こそ天才である．この時，非負整数 m, n（0 を含む）に対し，$a^{mn} = (a^m)^n$，$a^{m+n} = a^m a^n$ が成り立つ．

- $a \neq 0$ の場合に，a^{-1} は，$a^{-1} \cdot a^1 = a^0$ となるように，$\dfrac{1}{a}$ で定義され，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，a^{-n} は，$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$ で定義される．
- $a \geq 0$ の場合に，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，$a^{\frac{1}{n}}$ は，$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1$ となるように，$x^n = a$ を満たす唯一の実数（ので，$\sqrt[n]{a}$ とも書く）で定義される．これは必ず存在し一意に決まる．さらに，$a > 0$ ならば，$a^{-\frac{1}{n}}$ は，$(a^{-1})^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{-1}$ で定義される．
- 結局，$a > 0$ **の場合に限り，一般の有理数** $p = \dfrac{m}{n}$ **に対して**（m：整数，n：自然数），$a^p \overset{\text{def}}{=} (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ が定義できる．

  この時，有理数 p, q に対し，$a^{pq} = (a^p)^q$，$a^{p+q} = a^p a^q$ が成り立つ．

2＞ ＜1＞より，$a > 0$ を固定して，有理数 p に関する関数と見て，$f(p) \overset{\text{def}}{=} a^p$ と書くと，$p < q \Leftrightarrow f(p) < f(q)$ であり，$f(p) - f(q) = a^p(1 - a^{q-p})$ より，p と q が十分近いならば，$f(p)$ と $f(q)$ も近く，また有理数が実数中に稠密に存在することより，関数 f は実数 r 上の連続関数 $\overline{f}(r)$ に一意に拡張できる．a^r はこれを使って定義される．

$$a^r \overset{\text{def}}{=} \overline{f}(r)$$

$a = 1$ を考えると，$1^{-1} = 1$，どんな自然数 n に対しても $\sqrt[n]{1} = 1$ であるので，結局，どんな実数 r に対しても $1^r = 1$ となり,「1 は何乗しても 1」という規則は実数乗にまで保存されることがわかる．

ここで，**実数 r を固定**し，x^r を 実数 x の関数 と見なす時,「**べき関数**」と呼ぶ．

- 自然数 n に対して，x^n は，$-\infty < x < \infty$ 上のべき関数.
- 実数 r に対して，x^r は，$0 < x$ 上のべき関数.
- $(x + y)^r$ の展開を二項展開と呼び，r が実数の場合に一般化される.（**後日説明**）

一方，**正実数 a を固定**し，a^x を 実数 x の関数 と見なす時,「（a を底とする）**指数関数**」と呼ぶ．$-\infty < x < \infty$ 上で定義される.

- 単に「指数関数」という場合は，e を底とした，e^x を指す.
- 一般に，$a^{x+y} = a^x a^y$ を指数法則と呼ぶ.

３＞ 実数 x に対して,（e を底とする）指数関数 e^x 及び三角関数（$\sin x, \cos x$）のテーラー級数展開（**後日説明**）より,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n,\ \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1},\ \cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m},$$

これを「形式的に拡張」して，i を虚数単位，x を実数とした時に,

$$e^{ix} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ix)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + i\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} = \cos x + i\sin x$$

が定義される.

これを基にして一般の正の実数 a の i 乗は,

$$a^i \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\log a} = \cos(\log a) + i\sin(\log a)$$

として定義される.

ここで，$a = 1$ を考えると，$\log 1 = 0$ なので，$\cos 0 = 1$，$\sin 0 = 0$ より，$1^i = 1 + i \cdot 0 = 1$ となり,「１は何乗しても１」という規則は虚数乗にまで保存されることがわかる.

なお，指数が一般の複素数 $z = x + iy$ の場合は，指数法則を用いて，以下にように定義する（ただし，$a > 0$）.

$$a^z = a^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} a^x a^{iy} = a^x\cos(y\log a) + ia^x\sin(y\log a)$$

注意：さらに，複素数の意味（極座標表現）を介して，複素数の複素数乗を定義できる．ただし，本講義では原則として複素数は扱わない.

○予備的練習問題

問１

＜１＞ 実数値関数 $f(x), g(x), h(x)$ の導関数を各々$f'(x), g'(x), h'(x)$ と書くとする．この時，$\dfrac{f(x)g(x)}{h(x)}$ の導関数を $f'(x), g'(x), h'(x)$ で表わせ.

＜２＞ $\dfrac{xe^x}{x^2-1}$ の導関数を求めよ.

問２

λ を正の実数（$\lambda > 0$）のパラメタ（定数）として，以下の定積分を計算せよ（有限値をもつか，または発散する）.

＜１＞ $\displaystyle\int_0^1 x^{-\lambda}dx,$ ※積分区間は $[0, 1]$.

＜2＞ $\displaystyle\int_1^\infty x^{-\lambda}dx,$ ※積分区間は $[1,\infty)$.

＜3＞ $\displaystyle\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}dx,$ ※積分区間は $[0,\infty)$.

ただし，$f(x)\geq 0$ なる関数（非負関数）に対して，a, A は実数として，

- $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$ と定義する．
- $f(x)$ が積分区間 $[a,A]$ の端 $x=a$ で値を持たない場合，
  $\displaystyle\int_a^A f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to a+0}\int_b^A f(x)dx$ と定義する．
- また，それらの場合も，∞ や a を区間端の値として部分積分を行ってよいと仮定する．ただし，式にそれらの値を代入した結果が発散するかも知れない．

問３

自然数 n に対して，$\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$ を証明せよ．この階乗の積分表現の一般化がガンマ関数（**後日説明**）．

問４

関数 $f(x)=x\log x$ （ただし $0<x\leq 2$）のグラフの概形を書け．$\log$ は自然対数（ネイピア数 e を底とする）．

<u>解説（解答）</u>

問１の解説 （微分計算の基本）

＜１＞は微分の定義に戻って計算することも不可能でないが，九九を知ってないと日常生活での計算が辛い，というのと同じ意味で，以下の微分法則は最低限覚える．なお，関数 $f(x)$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を，誤解のない場合には，$f'(x)$ とも書く．

- **和の微分**： $\dfrac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$
- **積の微分**： $\dfrac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- **合成関数の微分**： $g(x)$ の値域が $f(x)$ の定義域に含まれる時，

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

この **<u>３つ（だけ）が原理的な法則</u>** である．これらを適用することで，例えば，

- **逆関数の微分**：$\dfrac{d}{dx}g(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$　ただし，$y = f(x)$ の逆関数が $y = g(x)$.

  証明：$y = g(x)$ ならば，$x = f(y)$ なので，$x = f(g(x))$ という恒等式が成立し，その両辺を x で微分すれば：

  $$1 = f'(g(x))g'(x), \quad \text{よって} \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

  例：$f(x) = e^x, g(x) = \log x$ とすると，$f'(x) = e^x$ より，

  $$\frac{d}{dx}(\log x) = g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

- さらなる例として，合成関数の微分計算から，

  $$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, \quad \frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x), \quad \frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

  などが導ける．最初の式は，$g(x) = \dfrac{1}{x}$ として，$\dfrac{d}{dx}(g(f(x))) = g'(f(x))f'(x)$ を適用すればよい．

さて、問題に戻ると，＜１＞は,

$$\frac{(f(x)g(x))'}{h(x)} + (f(x)g(x))\Big(\frac{1}{h(x)}\Big)' = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{h(x)} - \frac{f(x)g(x)h'(x)}{h^2(x)}$$

＜２＞は,

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x,\ g(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x,\ h(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 - 1$$

と置くと，$f'(x) = 1,\ g'(x) = e^x,\ h'(x) = 2x$ なので，＜１＞を使って,

$$\frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{h(x)} - \frac{f(x)g(x)h'(x)}{h^2(x)} = \frac{(1+x)e^x}{x^2-1} - \frac{2x^2e^x}{(x^2-1)^2} = \frac{e^x(x^3 - x^2 - x - 1)}{(x^2-1)^2}$$

問２の解説 （広義積分：区間の端で無限大になる関数，無限区間）

＜１＞，＜２＞は，$\lambda > 0$ をさらに，$0 < \lambda < 1, \lambda = 1, 1 < \lambda$ に場合分けが必要．$0 < x$ の範囲で,

- $\lambda \neq 1$ の場合，$x > 0$ で不定積分 $\displaystyle\int x^{-\lambda}dx = \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}$ より,

  $$\int_0^1 x^{-\lambda}dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a\to+0}\int_a^1 x^{-\lambda}dx = \lim_{a\to+0}\left[\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_a^1 = \lim_{a\to+0}\frac{1-a^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

  $$\int_1^\infty x^{-\lambda}dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A\to\infty}\int_1^A x^{-\lambda}dx = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_1^A = \lim_{A\to\infty}\frac{A^{1-\lambda}-1}{1-\lambda}$$

よって，

$$\int_0^1 x^{-\lambda}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda} & (1 > 1-\lambda > 0) \\ \infty & (1-\lambda < 0) \end{cases}, \quad \int_1^{\infty} x^{-\lambda}dx = \begin{cases} \infty & (1 > 1-\lambda > 0) \\ \frac{1}{\lambda-1} & (1-\lambda < 0) \end{cases}$$

積分区間の端で無限大になる関数の場合や積分区間が無限の場合は，**関数値の符号が区間の途中で変わらない（常に 0 以上か，または常に 0 以下）限り，上のように扱う．**以降は，面倒なので，$\lim\ldots$ を省略する場合がある．ただし，関数値の符号が（無限回）変化する場合は注意を要することがある（ルベーグ積分など．**後日説明**）

- $\lambda = 1$ の場合，$x > 0$ で不定積分 $\displaystyle\int x^{-1}dx = \log x$ より，

$$\int_0^1 x^{-1}dx = \lim_{a\to+0}[\log x]_{x=a}^1 = -\lim_{a\to+0}\log a = \infty, \quad \int_1^{\infty} x^{-1}dx = \lim_{A\to\infty}[\log x]_{x=1}^A = \infty$$

＜3＞は，部分積分の問題であり，問1の「関数の積の微分」に係わる．問1の解説の3種の微分演算の各々で，両辺の定積分を取れば,

- **和の積分：**和の微分演算より，$\Big[f(x)+g(x)\Big]_a^b = \displaystyle\int_a^b (f'(t)+g'(t))dt$．
（左辺）$= \Big[f(x)\Big]_a^b + \Big[g(x)\Big]_a^b = \displaystyle\int_a^b f'(t)dt + \int_a^b g'(t)dt$．これが（右辺）と等しい．$f', g'$ を F, G と置き換えると，$\boxed{\displaystyle\int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt = \int_a^b (F(t)+G(t))dt}$

- **部分積分：**積の微分演算より，$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = \displaystyle\int_a^b (f'(t)g(t)+f(t)g'(t))dt$．
和の積分より（右辺）$= \displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)g'(t)dt$．これが（左辺）と等しい．言い換えると，$\boxed{\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt}$

よって，＜3＞は，$\lambda > 0$ より

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}dx &= \Big[-xe^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = \Big[-xe^{-\lambda x}\Big]_0^{\infty} + \Big[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big]_0^{\infty} \\ &= -\lim_{x\to\infty} xe^{-\lambda x} - \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = -0-0+\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

なぜなら，2行目第1項は，$x\to\infty$ の時に，x よりも $e^{\lambda x}$ の方が急激に大きくなるので，0 になる（**後日説明**）．

- **置換積分：**関数 $g(x)$ が $x \in [a,b]$ で単調で，その値域が関数 $f(x)$ の定義域に含まれている時，合成関数の微分演算より，$\Big[f(g(x))\Big]_a^b = \displaystyle\int_a^b f'(g(t))g'(t)dt$．

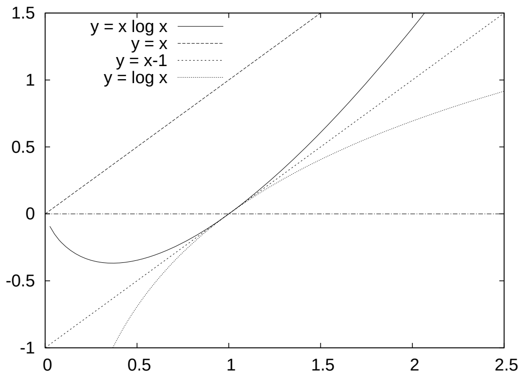

図 1: 曲線 $y = x\log x$

言い換えると，$\boxed{\Big[f(x)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(s)ds = \int_a^b f'(g(t))g'(t)dt}$

別の書き方をすると，$F(x) = f'(x)$ として，

$\boxed{\int_{g(a)}^{g(b)} F(s)ds = \int_a^b F(g(t))g'(t)dt}$ または，$\boxed{\int_p^q F(s)ds = \int_{g^{-1}(p)}^{g^{-1}(q)} F(g(t))g'(t)dt}$

つまり，関数 $F(s)$ の定積分を，$s = g(t)$ で変換した t での定積分に変換する．

この **３つ（だけ）が原理的な法則** である．これらを適用することで，例えば，

- **逆関数の積分**：$y = f(x)$ の逆関数が $y = g(x)$ とする．

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)dx &= \Big[xg(x)\Big]_a^b - \int_a^b xg'(x)dx = \Big[xg(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(g(x))g'(x)dx \\ &= \Big[xg(x)\Big]_a^b - \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)ds = bg(b) - ag(a) - \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)ds\end{aligned}$$

最初の等式は部分積分，2 つ目の等式は恒等式 $f(g(x)) = x$，3 つ目の等式は置換積分，を利用．

よって，関数 f の定積分を使って，f の逆関数 g の定積分が計算できる．また，この式は積分によって計算される図形の面積を使っても説明できる．

問３の解説（積分と表現，数学的帰納法）

任意の自然数 n に対して，部分積分を使って

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^n e^{-x}dx &= \Big[-x^n e^{-x}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty nx^{n-1}e^{-x}dx = n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \\ &= n\Big[-x^{n-1}e^{-x}\Big]_0^\infty + n\int_0^\infty (n-1)x^{n-2}e^{-x}dx \\ &= n(n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}dx = \cdots = n(n-1)\cdots 1\int_0^\infty e^{-x}dx = n!\end{aligned}$$

厳密には，前問同様に，$\int_0^A ...dx$ に対して，$A \to \infty$ を計算し，また，証明としては数学的帰納法を用いればよい（各自念のためやってみて下さい）．この時，

$$\left[-x^n e^{-x}\right]_0^\infty = -\lim_{A\to\infty} A^n e^{-A} = -\lim_{A\to\infty} \frac{A^n}{e^A} = 0$$

である（指数関数の方がべき関数より速く増大する．**後日説明**）．

問４の解説（関数のグラフ）

関数 $f(x) = x\log x \quad$（ただし $0 < x \leq 2$）のグラフの概形を書くには，高校で学んだように微分して傾きやその変化を調べる．

$f'(x) = 1 + \log x,\ f''(x) = 1/x \quad (0 < x \leq 2)$．これより，$f'(x) < 0\ (0 < x < \frac{1}{e})$，$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$，$f'(x) > 0\ (\frac{1}{e} < x \leq 2)$，$f''(x) > 0$．

また，$y = 1/x$ とおけば，$y \to \infty$ の時に，y よりも $\log y$ の方がゆっくり大きくなるので（**後日説明**），以下の収束が示せる．

$$\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{y\to\infty} \frac{\log 1/y}{y} = \lim_{y\to\infty} -\frac{\log y}{y} = -0 \quad (0 < x)$$

よって，$0 < x < 1$ で $f(x) < 0$, $f(1) = 0$, $1 < x \leq 2$ で $f(x) > 0$ の，下に凸な図１のようなグラフになる．

注：（図１参照）

$0 < x$ では，$\log x \leq x - 1 \leq x\log x$ が成り立つ．等号が成り立つのは $x = 1$ の場合のみ．

練習１（指数とべきが同時にある微分）

$x^{-x}\ (0 < x)$ の導関数：$\dfrac{d}{dx}\left(x^{-x}\right)$ 　求めよ．

練習２（小レポート課題）

２つの給与オプションが提示された．どういう理由でどちらを選びますか？

- オプション１：年度毎更新で，初年度は年棒が 1000 ドル，毎年 200 ドルずつ昇給．
- オプション２：半年毎更新で，最初の半年は（その間の）給与が 500 ドル，半年毎に 50 ドルずつ昇給．