応用解析学（電子２年）　　第２講

- 三角関数，逆三角関数

前回復習

練習１

- 導関数：$\dfrac{d}{dx}\left(x^{-x}\right)\ (0<x)$　を求めよ．

$a>0$ の時，$a^b=e^{\log a^b}=e^{b\log a}$ なので，$0<x$ において，

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{-x\log x}\right)=e^{-x\log x}\frac{d}{dx}(-x\log x)=-x^{-x}(1+\log x)$$

別解：

２変数関数 $f(y,z)$ と１変数関数 $y=g(x), z=h(x)$ を与えた時（どれも滑らか），

合成関数の微分法則の多変数版より，

$$\frac{d}{dx}f(g(x),h(x))=\frac{\partial f}{\partial y}(g(x),h(x))\frac{dg}{dx}(x)+\frac{\partial f}{\partial z}(g(x),h(x))\frac{dh}{dx}(x)$$

である．よって，$f(y,z)=y^{-z}\ (0<y),\ g(x)=x,\ h(x)=x$ と置くと，

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,z)=-zy^{-z-1},\ \frac{\partial f}{\partial z}(y,z)=-y^{-z}\log y,\ \frac{dg}{dx}(x)=1,\ \frac{dh}{dx}(x)=1$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-x}\right)=\frac{d}{dx}f(x,x)=-x\cdot x^{-x-1}\cdot 1-x^{-x}\log x\cdot 1=-x^{-x}(1+\log x)$$

練習２（小レポート課題）

２つの給与オプションが提示された．どういう理由でどちらを選びますか？

- オプション１：年度更新で初年度年棒が1000ドル，毎年200ドルずつ昇給．
- オプション２：半年更新で最初の半年は（その間の）給与が500ドル，半年毎に50ドルずつ昇給．

これは有名な（だが簡単な）ひっかけ問題である．オプション１および２での n 年目の１年間の収入を各々a_n，b_n と置く．

$$\begin{cases} a_1=1000, & a_n=a_{n-1}+200\ (n=2,3,\ldots) \\ b_1=1050, & b_n=b_{n-1}+200\ (n=2,3,\ldots) \end{cases}$$

が理解できれば，答えは自明．数列の式でなくても，横軸が時間（半年単位），縦軸がその半年間の収入，というグラフを書けば，分かりやすい．単位が違うものを「直接」比較すると勘違いしやすい（騙されやすい），という例である．

追加例題（**多変数関数**）

2 変数関数 $f(x,y) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ を考える．$(x,y) \neq (0,0)$ で定義.

1＞ $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$

2＞ $\displaystyle\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)\Big|_{x=1,y=1}$ および $\displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\Big|_{x=1,y=1}$

＜1＞：
$y \neq 0$ の時 $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は分子・分母とも $x=0$ で連続で，分母は正なので，全体としても $x=0$ で連続．よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1$ （$y(\neq 0)$ に依らず）．
よって，$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = -1$.
一方，$f(x,y) = -f(y,x)$ より，

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = -\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(y,x)\right) = -\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = 1$$

(補足)：計算からも明らかなように，x 軸（$y=0$）や y 軸（$x=0$）に沿ってみると，$f(x,y)$ は一定値を取る．もう少し丁寧に見ると，原点を通るどの直線（$y=ax$）に沿っても値は一定である．実際，$f(x,ax) = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$．つまり，$xy$ 平面に水平で高さの異なる直線が各方向から z 軸（$(x,y)=(0,0)$）と交わっている（異なる高さで）．よって，$(0,0)$ で不連続になる．

＜2＞： $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1 - \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$ より， $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 4x\left(\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{4y^3}{(x^2+y^2)^3}\right) = \frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

より，$\displaystyle\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)\Big|_{x=1,y=1} = \frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\Big|_{x=1,y=1} = 0$
一方，$f(x,y) = -f(y,x)$ より，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(y,x)}{\partial y}\right) == -\frac{8yx(y^2-x^2)}{(y^2+x^2)^3} = \frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

より，同様に，$\displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\Big|_{x=1,y=1} = \frac{8xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\Big|_{x=1,y=1} = 0$

追加練習

$(x,y) \neq (0,0)$ で定義される 2 変数関数 $f(x,y) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ を考える．
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy$ および $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx$ の値を求めよ．

2. 三角関数の復習

$$\begin{cases} \cos(-x) \ = \ \cos x \ [\text{偶関数}], \quad \sin(-x) \ = \ -\sin x \ [\text{奇関数}], \\ \sin^2 x + \cos^2 x \ = \ 1, \\ \cos(x+\theta) \ = \ \cos x \cos\theta - \sin x \sin\theta, \quad \sin(x+\theta) \ = \ \cos x \sin\theta + \sin x \cos\theta \\ [\text{加法定理}], \\ (\cos x)' \ = \ -\sin x \ = \ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin x)' \ = \ \cos x \ = \ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \\ (\tan x)' \ = \ (\sin x/\cos x)' = 1+\tan^2 x \ = \ 1/\cos^2 x, \quad \int \tan x dx \ = \ \cdots \ = \ -\log|\cos x| \end{cases}$$

例題（重要）

＜1＞ $\dfrac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right), \quad \dfrac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ を示せ．

- $(\cos x)' \ = \ -\sin x \ = \ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $(\sin x)' \ = \ \cos x \ = \ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.
- $\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\cos x = \cos\left(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right)$ が成り立つならば，
  $\dfrac{d^n}{dx^n}\cos x = \dfrac{d}{dx}\cos\left(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$

＜2＞ $y = f(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\sin x}{x}$ $(0 < x \leq 2\pi)$ のグラフの概観を書け．

- $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = 1$（実はこれは **三角関数の本質的な性質**）．また，
- $f(\pi) = f(2\pi) = 0$; $f(x) > 0$ $(0 < x < \pi)$; $f(x) < 0$ $(\pi < x < 2\pi)$.
- $|\sin x| \leq 1$，$x = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ で $\sin x = 1$ (-1) より，$x = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$ で $y = f(x)$ は $y = \dfrac{1}{x}$ $\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ に接する．
- $f'(x) = \dfrac{\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2} = \dfrac{1}{x}\left(\cos x - \dfrac{\sin x}{x}\right)$ より，$0 < x < \pi$ で，$f'(x) < 0$．
  - $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ では，$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} > x > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{x} > \cos x > 0$ に注意すると，この範囲で，$\tan x > x$ を示せばよい．これは，$g(x) \overset{\text{def}}{=} \tan x - x$, $g'(x) = \tan^2 x > 0$, $g(0) = 0$ より従う．

- $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ では，$\cos x < 0,\ \sin x > 0$ より，$\cos x - \dfrac{\sin x}{x} < 0$ ．

- $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ で，$f'(x) = \dfrac{1}{x}\left(\cos x - \dfrac{\sin x}{x}\right) > 0$
  - よって，$f(x)$ は，$\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ の範囲の途中で最小値を取る．
- $f''(x) = -\dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{\cos x}{x^2} - \left(\dfrac{\cos x}{x^2} - \dfrac{2\sin x}{x^3}\right) = -f(x) - \dfrac{2}{x}f'(x)$ なので，
  - $x = \pi$ では，$f(\pi) = 0,\ f'(\pi) < 0$ より，$f''(\pi) > 0$
  - $x = 2\pi$ では，$f(2\pi) = 0,\ f'(2\pi) > 0$ より，$f''(2\pi) < 0$

  よって，変曲点は微妙にずれている．

以上から図１左のような概形が判る．

＜３＞ 微分計算：$\dfrac{d}{dx}\tan\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(0 < x)$

$f(x) = \tan x$ は，$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ で微分可能で，$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$，
$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ は，$0 < x$ で微分可能で，$g'(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2}$ なので，$0 < \dfrac{1}{\sqrt{x}} < \dfrac{\pi}{2}$（すなわち $\dfrac{4}{\pi^2} < x$ ）においては，

$$\frac{d}{dx}\tan\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{1}{\cos^2(x^{-1/2})}\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}\cos^2\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

＜４＞ 積分計算：$\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-x}\sin x dx$

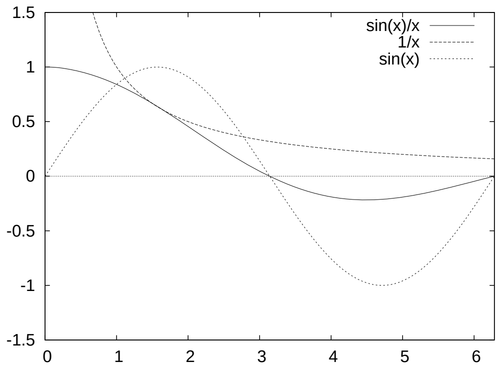
２回部分積分すると元の形が出る．大雑把に書くと

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx &= -\left[e^{-x}\cos x\right]_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\cos x dx \\ &= 1 - \left(\left[e^{-x}\sin x\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\sin x dx\right) = 1 - \int_0^\infty e^{-x}\sin x dx\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}$.

3. 逆三角関数の復習

$$\begin{array}{lll} x = \sin y \quad (-\pi/2 \le y \le \pi/2) & \Leftrightarrow & y = \arcsin x \quad (-1 \le x \le 1) \\ x = \cos y \quad (0 \le y \le \pi) & \Leftrightarrow & y = \arccos x \quad (-1 \le x \le 1) \\ x = \tan y \quad (-\pi/2 < y < \pi/2) & \Leftrightarrow & y = \arctan x \quad (-\infty < x < \infty) \end{array}$$



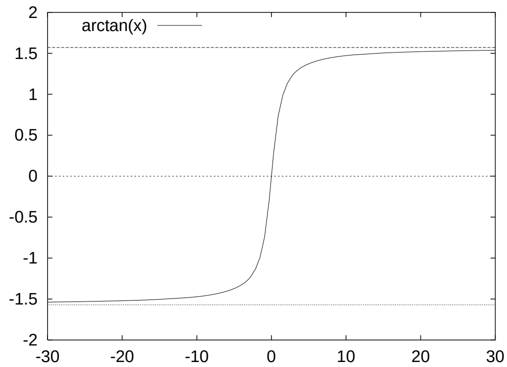


図 1: 曲線の概形. 左：$y = \sin x/x$、右：$y = \arctan x$

例題（重要）

＜1＞ **逆三角関数の微分**（導関数）: $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty)$

$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$ より,

大雑把に書けば, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

正確に言えば, 一般に $f(x)$ の逆関数を $g(x)$, それらの導関数を各々 $f'(x), g'(x)$ と書くと（前回見たように）, $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$. これは, 逆関数のグラフが $y = x$ で線対称であることからも想像できる. よって,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

また, $\dfrac{1}{1+x^2}$ の不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$ がわかる.

＜2＞ **加法定理**の適用例（逆関数版）: $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

$x \stackrel{\text{def}}{=} \arctan\dfrac{1}{2}$ と置いて, $\dfrac{\pi}{4} - x = \arctan\dfrac{1}{3}$ を示すためには $\tan x = \dfrac{1}{2}$ から $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \dfrac{1}{3}$ を導けばよい. 加法定理で計算すると,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x}{\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \frac{1}{3}$$

＜3＞ **逆三角関数のグラフ**: $y = \arctan x$

$$\arctan 0 = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

また，$(\arctan x)' = 1/1+x^2 > 0$ より，単調増加で，その増加度合いは，$|x| \to \infty$ で最も緩やかで，$x=0$ で最も急．$y=\arctan x$ のグラフの概観は図 1 右．

＜4＞ $\underline{\sin, \cos, \tan}$ の関係 ⇔ $\underline{\arcsin, \arccos, \arctan}$ の関係：例えば，

- $\arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - \arccos x$ は，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = x = \cos\theta$ と等価．
- $\arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad (-1 < x < 1)$ は，$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ の範囲で $\sin\theta = x \ \Rightarrow\ \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ と等価．

＜5＞ **逆三角関数の定積分**：$\displaystyle\int_0^1 \arcsin x dx = \frac{\pi}{2} - 1$

部分積分と置換積分を使う． $y = \arcsin x$ と置き $0 \le x \le 1 \ \Leftrightarrow\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$．$\arcsin 0 = 0, \arcsin 1 = \pi/2$ なので，大雑把に書けば，

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \arcsin x dx &= \Big[x \arcsin x\Big]_{x=0}^1 - \int_0^1 x\left(\frac{d}{dx}\arcsin x\right)dx = \arcsin 1 - \int_0^1 x\frac{dy}{dx}dx \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin y dy = \frac{\pi}{2} + \Big[\cos y\Big]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}
$$

正確に言えば，一般に $f(x)$ の逆関数を $g(x)$，$g(x)$ の導関数を $g'(x)$，$f(x)$ の不定積分を $F(x) = \int f(x)dx$ と書くと（前回見たように），

$$
\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x),\ \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \Big[F(g(x))\Big]_a^b = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy
$$

なので，逆関数 g の定積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx \ =$

$$
\Big[xg(x)\Big]_a^b - \int_a^b xg'(x)dx = \Big[xg(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \Big[xg(x)\Big]_a^b - \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy
$$

なお，この等式は，$g(x)$ が非負の単調増大関数で $0 < a < b$ の場合，平面上の $x=a, y=0, x=b, y=g(x)$ で囲まれた面積と，$y=g(a), x=0, y=g(b), x=f(y)$ で囲まれた面積の関係として解釈できる．

これを $f(x) = \sin x,\ F(x) = -\cos x, a=0, b=1$ に適用すれば，

$$
\int_0^1 \arcsin x dx = (\arcsin 1 + \cos(\arcsin 1)) - (\cos(\arcsin 0)) = \frac{\pi}{2} - 1
$$

練習（**逆三角関数の微分・積分**）

(i) $\dfrac{d}{dx}\arccos x \ (-1 < x < 1)$ (ii) $\displaystyle\int_0^1 \arctan x dx$