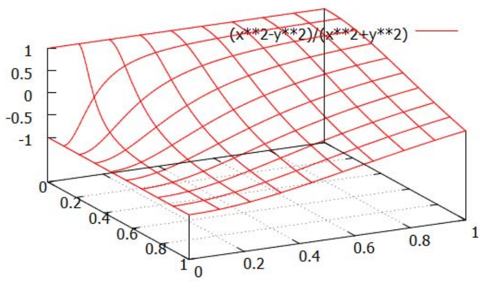
応用解析学（電子２年）　　第３講

- 有理関数の部分分数分解，有理関数・無理関数の不定積分

前回復習

追加練習（多変数関数の累次積分）

$f(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$：
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy$,
$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx$ の値を求める．



まず，積分をまじめに計算してみる． $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1 - \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}$ より，

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) dx = 1 - 2y\int_0^{1/y} \frac{1}{z^2+1}dz = 1 - 2y\arctan\frac{1}{y}$$

ただし，$z = x/y$ と置き（$dx = ydz$），さらに，$\dfrac{d}{dz}\arctan z = \dfrac{1}{1+z^2}$．
次に，$t = 1/y$ と置いて（ $dy = -\dfrac{1}{t^2}dt$），部分分数分解（本日復習）も使い，

$$\begin{aligned}\int_0^1 2y\arctan\frac{1}{y}dy &= -\int_\infty^1 \frac{2}{t^3}\arctan t dt = \int_1^\infty \frac{2}{t^3}\arctan t dt = -\left[\frac{1}{t^2}\arctan t\right]_1^\infty \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{1}{t^2(1+t^2)}dt = -(0-\frac{\pi}{4}) + \int_1^\infty \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{t} + \arctan t\right]_1^\infty = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \left(1+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = \int_0^1 \left(1 - 2y\arctan\frac{1}{y}\right) dy = 1 - 1 = 0$．
逆順も同様にして，$\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dy = 2x^2\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2}dy - 1 = 2x\arctan\frac{1}{x} - 1$．
よって，$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(2x\arctan\frac{1}{x} - 1\right) dx = \cdots = 1 - 1 = 0$．

実は積分計算なしでも結果を示せる． $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} - \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ より，

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+y^2}dx\right) dy - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2}{x^2+y^2}dx\right) dy$$

第2項で，dx に関する定積分と dy に関する定積分の順序交換可能なら，
（第2項）$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2}{x^2+y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+y^2} dx \right) dy$ ＝（第1項），より，
$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right) dy =$（第1項）$-$（第2項）$= 0$.
同様に，$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right) dx =$（第2項）$-$（第1項）$= 0$.
実際ここでの積分の順序交換は成立する（後日説明．フビニの定理）．

練習（逆三角関数の微分・積分）

(i) $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.

$y = \arccos x \, (-1 < x < 1, \ 0 < y < \pi), \ \cos y = x, \ \frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-x^2}$ なので，

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \cos y} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$$

全く同様に，$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となり，$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の不定積分（ただし $-1 < x < 1$ において）は逆 $\sin$ 関数や逆 $\cos$ 関数で表現できる（積分定数は無視）．

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \log \sqrt{2}$.

- 逆関数の積分の一般方式を適用すると

$$\int_0^1 \arctan x dx = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 x \left(\frac{d}{dx} \arctan x \right) dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \tan y dy$$

よって，

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x dx &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin y}{\cos y} dy = \frac{\pi}{4} - \int_1^{\sqrt{2}/2} \left(-\frac{1}{z} \right) dz = \frac{\pi}{4} - \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{z} dz \\ &= \frac{\pi}{4} - [\log z]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{\pi}{4} - \log \sqrt{2} \end{aligned}$$

ただし，$y = \arctan x, \ z = \cos y$ と置いた．

- **別解：** $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ を直接利用すると，

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x dx &= [x \arctan x]_{x=0}^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \int_1^2 \frac{1}{2y} dy \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\log y]_{x=1}^2 = \frac{\pi}{4} - \log \sqrt{2} \end{aligned}$$

ただし，$y = 1 + x^2$ と置いた．

4. 有理関数の部分分数分解

１変数実係数の n 次多項式を n 次有理整関数と言う：

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad a_n \neq 0, n \geq 1$$

f, g を有理整関数として，その商 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ を「有理関数」と言う．

- 有理関数の導関数は，また有理関数になる（数学的帰納法で容易に示せる）．

f を n 次有理整関数とすると，代数方程式 $f(x) = 0$ が１個以上 n 個以下の根（実数または虚数の）を持ち，f が１次と２次の因数項の積の分解できることを「代数学の基本定理」と言う．例えば，

- $x^4 + x^3 + x + 1 = (x+1)^2(x^2 - x + 1) = (x+1)^2 \left((x - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} \right)$

のような形の積に解できる．

つまり，異なる実根を，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ （λ_j の多重度を m_j），異なる共役複素根対を，$\omega_1, \omega_1^*, \omega_2, \ldots, \omega_s, \omega_s^*$ （(ω_j, ω_j^*) の多重度を l_j）とすると，

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n (x - \lambda_1)^{m_1} \ldots (x - \lambda_r)^{m_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s} \qquad (1)$$

$$0 \leq r, s \leq n, \quad p_j^2 - 4q_j < 0, \quad \sum_{i=1}^{r} m_i + \sum_{j=1}^{s} 2l_j = n$$

さて，有理関数の分母に当る有理整関数を上記のように因数分解することで，有理関数自体を，以下の３種類の項の和に分解できる．これを**部分分数分解**と言う．

$$\text{i) 有理整関数,} \quad \text{ii)} \ \frac{A}{(x-\lambda)^m} \ \text{型の項,} \quad \text{iii)} \ \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m} \ \text{型の項} \qquad (2)$$

例えば，

- $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 1 + \dfrac{-2x^2 + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 1 - \dfrac{2x + 2}{x^2 + 1}$

式の最初の等号は，

- $x^4 - 2x^2 + 1 = (ax + b)(x^3 - x^2 + x - 1) + c \cdot x^2 + d \cdot x + f$

の a, b, c, d, f がこの順で決まる（4 次多項式を 3 次多項式で割る）．次の等式は，

- $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2 + 1)(x - 1)$,
- $-2x^2 + 2 = -2(x + 1)(x - 1)$

より得られる．

もちろん，すべての型の項を含むとは限らないし，iii) でいえば，$B=0$ の場合や $C=0$ の場合もある．分子の次数が分母と同じか大きい場合に，i) が出る．

- つまり，有理関数 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ の分母 f が式 (1) のように因数分解される時，

  分子 g の次数を N，$G(x)$ は高々 $N-n$ 次の有理整関数として：

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{f(x)} &= G(x)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i}\frac{A_{ik}}{(x-\lambda_i)^k}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{l_j}\frac{B_{jk}x+C_{jk}}{(x^2+p_jx+q_j)^k} \\ & 0\le r,s\le n,\quad p_j^2-4q_j<0\end{aligned} \tag{3}$$

一般に,「分母 $f(x)$ の因数分解が判っているなら」，つまり,「分母 $f(x)=0$ の根が判っているなら」，部分分数分解の実際の係数を決めることができる．それを，最も簡単な，$f(x)=0$ が n 個の異なる実根 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ を持つ場合で示す．

- $a_n=1$ とする．そうでなければ，$f(x), g(x)$ ともに a_n で割っておけばよい．

$$f(x)=(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)=\prod_{j=1}^{n}(x-\lambda_j)\qquad(\lambda_i\ne\lambda_j \text{ if } i\ne j)$$

- $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素（同じ因数を持たない）とする．そうでなければ，両方をその因数で割っておけばよい．
- さらに, $g(x)$ の次数は n より小とする．そうでなければ，多項式＋ $h(x)/f(x)$ に変形できて，$h(x)$ の次数は n より小にできる．

そこで，以下の形に変形できることは部分分数分解の定理から保証されるので，後は，各 A_j を決定すればよい．

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(x)}{(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)}=\frac{A_1}{x-\lambda_1}+\dots+\frac{A_n}{x-\lambda_n}\quad(x\ne\lambda_j,\ j=1,2,\dots n)$$

例 $\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$ **の部分分数分解**

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ より，$\dfrac{x+1}{x^2+x-2}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-1}$ $(x\ne-2, x\ne1)$ と置き，実数 A,B を求める．

等式の両辺に $(x+2)$ を乗じて $\dfrac{x+1}{x-1}=A+\dfrac{B(x+2)}{x-1}$ とし，$x=-2$ の時,（左辺）$=\dfrac{1}{3}$ より，$A=\dfrac{1}{3}$ でなければならない．

同様に，等式の両辺に $(x-1)$ を乗じて $\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{A(x-1)}{x+2}+B$ とし，$x=1$ の時，（左辺）$=\dfrac{2}{3}$ より，$B=\dfrac{2}{3}$ でなければならない．

よって，$\dfrac{x+1}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3(x+2)}+\dfrac{2}{3(x-1)}$.

5. 有理関数および無理関数の不定積分

有理関数：３つのパターン

以下の３つの積分は似ているが難易度が異なる．逆にいえばこれ以外はないことを説明する．

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$ ：数 III までやった高校生は解ける．
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)}dx$ ：部分分数分解使う．進学校なら高校でも習う．
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx$ ：逆三角関数が必要．大学生の問題．

部分分数分解を用いると，任意の有理関数の不定積分は，有理関数，log 関数，arctan 関数を用いて書き下せる．まず，式 (2) の i) と ii) の形の項は，

$$\begin{aligned}\int x^m dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad m=0,1,\dots\\ \int \frac{dx}{x-\lambda} &= \log|x-\lambda|, \quad \int \frac{dx}{(x-\lambda)^m} = \frac{-1}{(m-1)(x-\lambda)^{m-1}} \quad m=2,3,\dots\end{aligned}$$

また，iii) の形の項は，$p^2-4q<0$ より，

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} = \frac{B(x-b)}{((x-b)^2+c^2)^m} + \frac{Bb+C}{((x-b)^2+c^2)^m}, \quad m=1,2,\dots$$

ここで，右辺第１項は，$t=(x-b)^2+c^2$ とおけば，$1/t^m$ の不定積分：

$$\int \frac{(x-b)}{((x-b)^2+c^2)^m}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^m}$$

に帰着できる．よって，残ったのは，右辺第２項

$$I_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{((x-b)^2+c^2)^m}, \quad m=1,2,\dots$$

の形の項だけである．まず，$I_1(x)$ を求める．$t=\dfrac{x-b}{c}$ と置けば，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{c}$ より，

$$I_1(x) = \int \frac{dx}{(x-b)^2+c^2} = \dots = \frac{1}{c}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{c}\arctan t = \frac{1}{c}\arctan\frac{x-b}{c}$$

次に，一般の $(m+1)$ では，部分積分を用いて，m の場合に帰着できる．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x-b}{((x-b)^2+c^2)^m}\right) &= \frac{1}{((x-b)^2+c^2)^m} - \frac{2m(x-b)^2}{((x-b)^2+c^2)^{m+1}}\\ &= \frac{1}{((x-b)^2+c^2)^m} - \frac{2m}{((x-b)^2+c^2)^m} + \frac{2mc^2}{((x-b)^2+c^2)^{m+1}}\\ &= \frac{-(2m-1)}{((x-b)^2+c^2)^m} + \frac{2mc^2}{((x-b)^2+c^2)^{m+1}} \qquad \text{を積分して}\end{aligned}$$

$$\frac{x-b}{((x-b)^2+c^2)^m} = -(2m-1)I_m(x) + 2mc^2 I_{m+1}(x)$$

つまり，$I_1(x)$ から出発して，$I_m(x)$ が求まる．例えば，$m=2$ の場合，

$$I_2(x) = \frac{x-b}{2c^2((x-b)^2+c^2)} + \frac{1}{2c^3}\arctan\frac{x-b}{c}$$

となる（計算を確認してください）.

練習 1

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x^2+x-1}dx$ を求めよ

有理関数の不定積分に帰着

$R(x)$ を 1 変数の有理関数，$R(x,y)$ を 2 変数の有理関数として，

$$1.\ \int R(e^x)dx, \quad 2.\ \int R(\tan x)dx, \quad 3.\ \int R(\cos x, \sin x)dx,$$

$$4.\ \int R(x, \sqrt{ax+b})dx, \quad 5.\ \int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$

は，各々，以下のような変数変換で，t の有理関数の不定積分に帰着できる．ただし，根号 ($\sqrt{}$) の中が非負になるような x の範囲での積分を考える．

1. $e^x = t$ と置き，$\displaystyle\int R(e^x)dx = \int R(t)\frac{dx}{dt}dt = \int R(t)\frac{1}{t}dt$
2. $\tan x = t$ と置き，$\displaystyle\int R(\tan x)dx = \int R(t)\frac{dx}{dt}dt = \int R(t)\frac{1}{1+t^2}dt$
3. $\tan\dfrac{x}{2} = t$ と置き，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$
4. $\sqrt{ax+b} = t$ と置き，$x = \dfrac{t^2-b}{a}$，$\quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t}{a}$
5. $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = (\dfrac{ax+b}{cx+d})^{1/n} = t$ と置き，$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/n-1}\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

   よって，$ad=bc$ なら，$\dfrac{dt}{dx}=0$ なので，t はある定数 K で，$R(x,K)$ は x の有理関数になるので，積分可能.

   以降，$ad \neq bc$ する．上式より，t は単調増加または単調減少なので逆関数持つ.

$$x = \frac{-dt^n+b}{ct^n-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}$$

ここで，以下の右辺は t の有理関数の不定積分になっている．

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int R(x,t)\frac{dx}{dt}dt = \int R\left(\frac{-dt^n+b}{ct^n-a}, t\right)\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}dt$$

例題

例１：$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ は，$e^x = y$ と置くと，

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan y = \arctan(e^x)$$

例２：$\int \tan^4 x dx$ は，$\tan x = t$ と置くと，

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x dx &= \int \frac{t^4}{1+t^2}dt = \int \left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\ &= \frac{t^3}{3} - t + \arctan t = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x\end{aligned}$$

例３：$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$ は，$\tan(x/2) = t$ と置くと，

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx &= \ldots = \int \frac{1+t^2+2t}{2t}dt = \frac{1}{2}\log|t| + \frac{t^2}{4} + t \\ &= \frac{1}{2}\log|\tan\frac{x}{2}| + \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\end{aligned}$$

例４：$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ は，$\sqrt{1-x} = t$ と置くと

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = \int \frac{1}{t}(-2t)dt = -2\int dt = -2t = -2\sqrt{1-x}$$

例５：$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}dx$ は，$x^{\frac{1}{6}} = t$ と置くと

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}dx &= \ldots = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 2\log|x^{\frac{1}{6}}-1| \\ &\quad -\log\left(\left(x^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right) + 2\sqrt{3}\arctan\frac{2x^{\frac{1}{6}}+1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

例題２ より複雑な帰着の例

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ の計算を，有理関数の積分に帰着して行う．

  一方，$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\arccos x$ は前回の練習より判るので，その別解法とも言える．

$-1 < x < 1$ として，根号の中は $1-x^2 = -(x-1)(x+1) > 0$ なので，$\sqrt{-\dfrac{x+1}{x-1}} = t$ と置くと，$0 < t < \infty$ で，

$$x = 1 - \frac{2}{t^2+1},\ \frac{dx}{dt} = \frac{4t}{(t^2+1)^2},\ \sqrt{1-x^2} = t(1-x) = \frac{2t}{t^2+1}$$

より，

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{t^2+1}{2t}\left(\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right)dt = 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\arctan t$$

つまり，不定積分の別の形：$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = 2\arctan\sqrt{-\frac{x+1}{x-1}}$ が導かれるが，これは

$$2\arctan\sqrt{-\frac{x+1}{x-1}} \quad = \quad -\arccos x + C \tag{4}$$

を意味する．ただし C はある定数．

実際，$C = \pi$ でこの等式が成立．これを（本来の逆三角関数の定義から）導く．

$$y = \arctan\sqrt{-\frac{x+1}{x-1}},\ \text{と置くと，} \tan y = \sqrt{-\frac{x+1}{x-1}},\ \tan^2 y = -\frac{x+1}{x-1}$$

一方，

$$2z = -\arccos x + \pi\ \text{ と置くと}, x = \cos(\pi - 2z) = -\cos 2z$$

よって，以下のように，$y = z$ が示され，式 (4) が成り立つ．

$$\tan^2 y = -\frac{x+1}{x-1} = \frac{1-\cos 2z}{1+\cos 2z} = \frac{2\sin^2 z}{2\cos^2 z} = \tan^2 z$$

練習 2（応用）

- 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$ を計算せよ．
- 定積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-(x+e^{-x})}dx$ を計算せよ．