応用解析学（電子２年）　　第４講

- 冪（ベキ）乗関数，指数関数，対数関数と極限（復習・確認）
- テーラー展開，テーラー級数，一般化二項（級数）展開
- 小レポート課題出題

前回復習

- $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x^2+x-1}$ （不定積分）

$\displaystyle\frac{x^4-2x^2+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1-\frac{2x+2}{x^2+1} = x+1-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$ （前回参照）より，
$\displaystyle\int\left(x+1-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}+x-\log(x^2+1)-2\arctan x$

- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$ 　　$(e^{-x}=y：(0\le x<\infty)\Leftrightarrow(1\ge y>0),\ \dfrac{dy}{dx}=-y)$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_1^0 \frac{1}{y^{-1}+y}\times\frac{dy}{-y} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2+1} = [\arctan y]_{y=0}^1 = \frac{\pi}{4}$
別解：$e^x=y$ と置いても同様．最後が，$[\arctan y]_{y=1}^\infty = \dfrac{\pi}{4}$ となる．

- $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-(x+e^{-x})}dx$ 　　$(e^{-x}=y：(-\infty<x<\infty)\Leftrightarrow(\infty>y\ge 0),\ \dfrac{dy}{dx}=-y\ )$

$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-(x+e^{-x})} = \int_{-\infty}^\infty e^{-x}e^{-e^{-x}}dx = \int_\infty^0 ye^{-y}\frac{dy}{-y} = \int_0^\infty e^{-y}dy = 1$
別解：$e^x=y$ と置いても一手間増えるだけでほぼ同様．

6. 幂乗関数，指数関数，対数関数と極限（復習・確認）

- ベキ乗：正の実数 x と 実数 p に対して，x^p を定義．例：$x^{-1/3}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$．
- 指数：正の実数 a と 実数 x に対して，a^x を定義．
  特に，**指数関数** $\exp(x)\overset{\text{def}}{=}e^x$ 　$(-\infty<x<\infty)$：$e=2.718\ldots$（ネイピア数）
  - $\displaystyle e \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$．
    （ただし，n は自然数，x,h は実数，$h=1/x$）
    $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$
    $=e$.（ただし，$y=-x$）

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{xy} = e^x$.（x を固定し，$y = n/x$）
- $\exp(x) = e^x$ は，微分したもの（導関数）が自身と一致する唯一の関数.

- **対数関数** $\log x$： $x = e^y\,(-\infty < y < \infty) \Leftrightarrow \log x = y\,(0 < x)$

$$\log x \ < \ x-1 \ < \ x\log x\,(0<x,\ x\neq 1) \qquad \text{（第 1 回参照）} \tag{1}$$

- $\lim_{x\to 1\pm 0}\frac{\log x}{x-1} = \lim_{y\to\pm\infty}\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1$．ただし，$y = \frac{1}{x-1}$

言換えると， $ex < e^x < ex^x$

極限での関係

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ を $f(x) \ll g(x)$ と書くことにする．どんなに大きな正数 a, b，自然数 n に対しても，

- $x^{n+1} \gg a(x^n + x^{n-1} + \cdots + 1)$
  つまり，多項式の $x\to\infty$ での増加の速さは，最高次数だけで決まる.
- $e^{x^{1/a}} \gg x^b$，$b\log x \ll x^{\frac{1}{a}}$
  一般に，任意の正数 $p > q > 0$ に対して，増加の急な順に，
  指数関数 $\gg$ p-乗関数 $\gg$ q-乗関数 $\gg$ 対数関数.
- x^x （$0 < x$）は， $a^x \ll x^x \ll a^{x^2} = (a^x)^x$
- $n!$ は，$a^n \ll n! \ll n^n$．より精密にはスターリングの公式（後日）.

使い方の例：

- $\lim_{x\to+0} x\log x = \lim_{y\to\infty}\frac{-\log y}{y} = -0$ （第 1 回）.
- $\lim_{x\to+0}\left(\log x + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to\infty}(-\log y + y) = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{-\log y}{y}+1\right)\cdot y = \infty$（次例題).

例題

＜1＞ $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ $(x>1)$ のグラフの形を調べよ.

- $f(x) > 0$．そして， $x\to 1+0$ ： $f(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x \to 0$
- $x\to\infty$：$\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-x} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-1}}{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}} \to \frac{1}{e} = 0.3678\cdots$

1 階微分　$f'(x) = \dfrac{d}{dx}e^{x\log(1-1/x)} = \cdots = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x \left(\log\left(1-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x-1}\right)$

そこで，$f'(x) = f(x)h(x)$，　$h(x) = \log\left(1-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x-1}$ を調べる．

- $x \to 1+0$ ： $y = 1-\dfrac{1}{x} \to +0$,　$h(x) = \left(\log y + \dfrac{1}{y} - 1\right) \to \infty$.
- $x \to \infty$ ： $h(x) \to -0+0 = 0$
- $h'(x) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-1} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{x(x-1)^2} < 0$　（$h(x)$ 単調減）

よって，$h(x) > \lim_{y\to\infty} h(y) = 0$ であり，$f'(x) = f(x)h(x) > 0\ (1 < x)$

2 階微分　$f''(x) = (f(x)h(x))' = f'(x)h(x) + f(x)h'(x) = f(x)\left(h^2(x) + h'(x)\right)$

$0 < h(x) = \log\left(1-\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x-1} < \left(1-\dfrac{1}{x}-1\right) + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x(x-1)}$ より（不等式 (1) を用いた），　$h^2(x) < \dfrac{1}{x^2(x-1)^2}$ となり，

- $h^2(x) + h'(x) < \dfrac{1}{x^2(x-1)^2} - \dfrac{1}{x(x-1)^2} = \dfrac{1}{x^2(1-x)} < 0$

よって，　$f''(x) = f(x)\left(h^2(x) + h'(x)\right) < 0$

以上より $f(x)\ (1 \le x)$ は**上に凸の単調増加（0 から $1/e$）**．

＜2＞ $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) / \log(n+1) \to 1 \quad (n \to \infty)$ を示せ．

$S_n \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ と置き，$\log(n+1) = \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{x}dx$ と，**面積の大小関係**を利用すると，

$$S_n - 1 + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \ < \ \log(n+1) \ < \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = S_n$$

より，$1 < \dfrac{S_n}{\log(n+1)} < 1 + \dfrac{1}{\log(n+1)}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \to 1 \quad (n \to \infty)$

系： $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} \cdots = \infty$

$\boxed{\textbf{練習 1}}$ **(レポート課題 2)**

$n \to \infty$ の時，$\log(n+1) - \log n \ \to\ 0$ と $\dfrac{\log(n+1)}{\log n} \ \to\ 1$ を示せ.

これより，例題＜２＞の分母を変えた：$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)/\log n\right) = 1$ も成立.

7.（一実変数の）Taylor 展開，Taylor 級数

例：$\dfrac{d}{dt}(e^t) = e^t$ より，$e^x = e^0 + \displaystyle\int_0^x \frac{d}{dt}(e^t)dt = 1 + \int_0^x e^t dt$. 部分積分して，

$$\int_0^x e^t dt = \Big[(t-x)e^t\Big]_0^x - \int_0^x (t-x)e^t dt = xe^0 + \int_0^x (x-t)e^t dt \qquad \text{と変形し，}$$

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt$$

更に，部分積分で $\displaystyle\int_0^x (x-t)e^t dt = \ldots = \frac{x^2}{2}e^0 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 e^t dt$ と変形できるので，これを繰り返すと，任意の $n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt$$

最後の項：$R_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n e^t dt$ は，任意の x において，$n \to \infty$ で 0 に収束する．この証明には，e^t が $t \in [0, x]$（または $t \in [x, 0]$）の積分範囲で n によらずに有限の値を持つことを利用する．丁寧に書くと，

- $x > 0$ **なる** x **を固定**すると，$0 \le t \le x$ なので，$n \to \infty$ で
$$|R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt \le \frac{e^x}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt = \frac{e^x}{n!}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1} \ \to\ 0$$
- $x < 0$ **なる** x **を固定**すると，$x \le t \le 0$ なので，$n \to \infty$ で
$$|R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n!}\int_x^0 (t-x)^n e^t dt \le \frac{e^0}{n!}\int_x^0 (t-x)^n dt = \frac{1}{n!}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \ \to\ 0$$
- よって，指数関数 e^x は，$\boxed{e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots \ (-\infty < x < \infty)}$ と，べき級数で表現できる．

$\boxed{\textbf{系：}\ e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots}$

一般化しよう．**一実変数関数** $f(x)$ **が** $x = 0$ **の周りで十分に滑らか**（無限回連続微分可能）とする．部分積分を繰り返し使うことで，$f(x)$ を，$x = 0$ での f やそ

の導関数の値（$f(0), f'(0), \ldots$）を使って，x **の多項式とその余り**の形で表現できる．つまり，x **を固定**する毎に，

$$f(x) \;=\; f(0) + \int_0^x f'(t)dt \;=\; f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t)f''(t)dt \;=\; \ldots$$

- 以下，k-階導関数 $\dfrac{d^k}{dx^k}f(x)$ を $f^{(k)}(x)$ と略記する．

任意の自然数 n に対し，$f(x)$ を n 次多項式と関数 $R_{n+1}(x)$ の和で書ける．

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_{n+1}(x) \tag{2}$$

剰余項（残余項）：　$R_{n+1}(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$

これを $f(x)$ の，$x=0$ の周りの n-次 Taylor 展開（Maclaurin 展開）と呼ぶ．

- $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k$ は，$(n+1)$ 階以上の導関数が全部 0 になる場合の $x=0$ の周りの Taylor 展開と言える．ただし，${}_nC_k \overset{\text{def}}{=} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$　$k = 0, 1, \ldots, n$.

(i) 一般に，n **を固定**して，$\dfrac{R_{n+1}(x)}{x^n} \to 0 \quad (x \to 0)$ が**常に成り立つ**．このことを，「$(n+1)$-位の剰余項は，$x \to 0$ で n-位の無限小である」，と呼ぶ．

(ii) $x\ (x \neq 0)$ **を固定**した時，**もしも**，$R_{n+1}(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$ が成り立つ場合，「**点 x で（点 0 の周りの）Taylor 級数が収束**する」．

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

Taylor 級数が収束する x の範囲を収束範囲と呼ぶ．Taylor 級数は**冪（ベキ）級数**なので，実数 r（**収束半径**）があって，$|x| < r$ や $|x| \leq r$ や $-r < x \leq r$ などのパターンになる．**冪級数は一般に，収束範囲の内部では「絶対収束」かつ「一様収束」する**.（「一様収束」は次回）

- (i) の証明：

積分区間 $[0, x]\,(x \geq 0)$ または $[x, 0]\,(x < 0)$ を区間 $I(x)$ と書くことにし，$f^{(n+1)}(t)$ は，$I(x)$ で連続なので，$|f^{(n+1)}(t)|$ は，n に依存して，その範囲内のある点 $t = a$ で最大値 $M_n(x) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\max_{t \in I(x)} |f^{(n+1)}(t)| = |f^{(n+1)}(a)|$ を取る．

そこで，$x>0$ の場合，

$$
\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| &= \frac{1}{n!}\left|\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| \le \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n |f^{(n+1)}(t)|dt \\
&\le \frac{M_n(x)}{n!}\int_0^x (x-t)^n dt
\end{aligned}
$$

ここで，$\displaystyle\int_0^x (x-t)^n dt = \int_x^0 s^n(-ds) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$．よって，

$$
|R_{n+1}(x)| \le \frac{M_n(x)}{(n+1)!}|x^{n+1}|
$$

$x<0$ の場合も同様に示せ，$\displaystyle\left|\frac{R_{n+1}(x)}{x^n}\right| \le \frac{M_n(x)}{(n+1)!}x \to 0 \text{ (if } x\to 0)$.
最後の収束は，$x\to 0$ ならば $M_n(x)\to M_n(0)=|f^{(n+1)}(0)|$（有限）より．

- (ii) について：

剰余項 $R_n(x)$ は単に $f(x)$ とある n 次多項式との差なので，一般には小さい値とは限らない．よって，**個別に $R_n(x)$ の形を調べ，テーラー級数の収束範囲，つまり，$R_n(x)\to 0\,(n\to\infty)$ となる x の条件を知る（証明する）**必要がある．この範囲において，$f(x)$ は高次の多項式によっていくらでも正確に近似できる．

- $g(x)=f(x+a)$ と置き，$g(x)$ を $x=0$ の周りで Taylor 展開したものを $f(x)$ の $x=a$ の周りの Taylor 展開と呼ぶ．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x-a) = \sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_0^{x-a}(x-a-t)^n g^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f^{(n+1)}(s)ds
\end{aligned}
$$

練習 2

以下の 2 つの Taylor 級数の例が各々収束することを示せ．

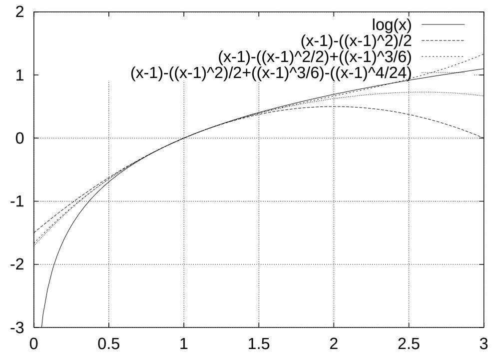
- $\dfrac{1}{1-x}$ は，$x=0$ の周りで Taylor 級数が収束（収束範囲は $-1<x<1$）．
- 対数関数は，$x=1$ の周りで Taylor 級数が収束（収束範囲は $-1<x\le 1$）：

$$
\log(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ (-1<x\le 1) \text{ すなわち}
$$

$$
\log x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k} = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots\ (0<x\le 2)
$$

右図からも，$0 < x \leq 2$ の範囲では，$\log x$ は，x の多項式でいくらでも精確に近似できる様子がわかる．特に，$\log(1+x)$ が $x=1$ でテーラー級数が収束することより以下が成立：

系： $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} \cdots = \log 2$



一般化二項（級数）展開

任意の実数 p に対して，(少なくとも) $|x| < 1$ の範囲で以下が成り立つ．

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{1}{2!}p(p-1)x^2 + \frac{1}{3!}p(p-1)(p-2)x^3 + \dots$$

収束範囲は，精密に見ると，p の値によっては $|x| < 1$ よりも大きい：

- $p = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow$ 任意の x （通常の二項展開：$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k$ ）
- $0 < p \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$，$-1 < p < 0 \Rightarrow -1 < x \leq 1$，$p \leq -1 \Rightarrow -1 < x < 1$

一般化二項係数 ${}_pC_k^*$ と一般化二項級数は以下のように定義される：

$${}_pC_0^* \overset{\text{def}}{=} 1, \quad {}_pC_k^* \overset{\text{def}}{=} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} {}_pC_k^* x^k = 1 + px + \frac{1}{2!}p(p-1)x^2 + \frac{1}{3!}p(p-1)(p-2)x^3 + \dots$$

「練習 2」の $\dfrac{1}{1-x} = (1 + (-x))^{-1}$ も一般化二項級数の例.

- $p = 0, 1, 2, \dots$ (二項展開) の場合，${}_pC_k^* = {}_pC_k \, (0 \leq k \leq p)$, $\quad {}_pC_k^* = 0 \, (k > p)$.
- p が負または，非整数の場合，

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1}, \quad f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}, \quad \dots$$
$$f^{(k)}(x) = p(p-1)\dots(p-k+1)(1+x)^{p-k} = k! {}_pC_k^*(1+x)^{p-k}$$

よって，$(1+x)^p$ を $x = 0$ の周りで Taylor 展開すると，任意の n に対して，

$$(1+x)^p \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_pC_k^* x^k + R_{n+1}(x)$$

$$
\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n (n+1)!_p C^*_{n+1}(1+t)^{p-(n+1)}dt \\
&= \frac{p(p-1)\cdots(p-n)}{n!}\int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{p-1}dt
\end{aligned}
$$

そこで，$n\to\infty$ の時 $|R_{n+1}(x)|\to 0$ を示せばよい．以下では簡単のために，収束範囲を $-1<x<1$ で考える．$x=0$ の場合は自明なので，$x\neq 0$ とする．

1. $0<x<1$ の場合，$x-t<x-tx=x(1-t)<x(1+t) \quad \text{for } 0<t<x$
2. $-1<x<0$ の場合，$x-t>x+tx=x(1+t) \quad \text{for } x<t<0$

より，$\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right|<|x| \quad \text{for } t\in(0,x]$ または $\in[x,0)$ そこで，

$$
\begin{aligned}
|R_{n+1}(x)| &\le \frac{|p(p-1)\cdots(p-n)|}{n!}\left|\int_0^x \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n |1+t|^{p-1}dt\right| \\
&\le \frac{|p(p-1)\cdots(p-n)|}{n!}|x|^n\left|\int_0^x |1+t|^{p-1}dt\right|
\end{aligned}
$$

よって，$|R_{n+1}(x)|\to 0$ を示すには，最右辺を

$A_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}\dfrac{|p(p-1)\cdots(p-n)|}{n!}|x|^n\left|\displaystyle\int_0^x |1+t|^{p-1}dt\right|$ と置き，

- $|x|<1$ **なる任意の** x **を１つ固定**して，$n\to\infty$ の時，$A_n(x)\to 0$

を言えばよい．感覚的には，$\dfrac{|p(p-1)\cdots(p-n)|}{n!}$ は $n\to\infty$ で分子と分母が同程度であり，$|x|^n\to 0$，右側の積分は n とは無関係なので，自明.

以下，それを厳密に示す（「ダランベールの収束判定法」を使う）．まず，

$$\left|\frac{A_{n+1}(x)}{A_n(x)}\right|=\left|\frac{p-n-1}{n+1}x\right|\to|x| \quad (n\to\infty)$$

より，十分大きな n を取ると，$\left|\dfrac{A_{n+1}(x)}{A_n(x)}\right|$ はいくらでも $|x|$ に近づき，また，$|x|<1$ なので，$1-|x|>0$．よって，ある十分大きな番号以降の任意の n で，

$$\left||x|-\left|\frac{A_{n+1}(x)}{A_n(x)}\right|\right|\le\frac{1-|x|}{2}, \quad \text{つまり，}\left|\frac{A_{n+1}(x)}{A_n(x)}\right|\le\frac{1+|x|}{2}<\frac{1+1}{2}=1$$

となる．$c\stackrel{\text{def}}{=}\dfrac{1+|x|}{2}$ と置けば，$c<1$ になるので，十分大きな n 以降の番号で（つまり，下式における $n+k,\ k=1,2,\ldots$ に対して）

$$\left|\frac{A_{n+k}(x)}{A_{n+k-1}(x)}\right|\le c, \quad \text{より，}|A_{n+k}(x)|\le\ldots\le c^k|A_n(x)|\to 0 \quad (k\to\infty)$$