応用解析学（電子２年）　　第５講

- 三角関数，逆三角関数の Taylor 級数
- 級数関数の連続性・微分可能性・項別微分～関数列の一様収束

前回復習

＜１＞ レポート課題２：

$$\log(n+1)-\log n=\log\frac{n+1}{n}=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \to\ 0$$
$$\frac{\log(n+1)}{\log n}=\frac{\log(n+1)-\log n+\log n}{\log n}=\frac{\log(n+1)-\log n}{\log n}+1\ \to\ 1$$

一般に，$n\to\infty$ で，$|a_n|$ が有限の最小値を持つならば，$(a_n-b_n\to 0)\ \Rightarrow\ \left(\frac{b_n}{a_n}\to 1\right)$

（**発展**）前回は極限比：$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\frac{1}{\log n}\right)=1$ を示したが，実は，$n\to\infty$ の時，**極限での差**：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n$ も有限の値に収束する．以下，それを示す（値は電卓で確かめてください）．レポート課題２より，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n+1)$ の収束を示せばよい．

$$d_n\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx\right)$$ とおき，

- $0<d_1<d_2<\ldots$ と**単調増加**で，かつ，
- $d_n<\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}<1$ より，**上に有界**（具体的には１未満）．

よって，$\{d_n\}$ は収束し，$\lim_{n\to\infty}d_n\le 1$．

参考　：実は，$\lim_{n\to\infty}d_n=0.57721\ldots$ であり，オイラー定数 γ と呼ばれる．

＜２＞ **テーラー級数の収束**の例（$n\to\infty$ で剰余項 $R_{n+1}(x)$ が 0 に収束するか？）

(i) $$\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\ (-1<x<1)}$$

$1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ と式で書けるので，剰余項 $R_{n+1}(x)$ も，

$R_{n+1}(x)=\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\ldots+x^n)=\frac{x^{n+1}}{1-x}$ と式で書け，$|x|<1$ なる x を固定すると，$n\to\infty$ で

$$|R_{n+1}(x)|=\left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right|=\left|\frac{1}{1-x}\right||x|^{n+1}\ \to\ 0\quad(x=-1\text{ では収束しない})$$

念のため，剰余項の定義より計算して $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ を確認する．$f(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{1-x}$ と置くと，$f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$．$s = \dfrac{x-t}{1-t} = 1 + \dfrac{x-1}{1-t}$ と置くと，

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \frac{(n+1)!}{(1-t)^{n+2}}dt \\
&= (n+1)\int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{1}{(1-t)^2}dt = (n+1)\int_x^0 s^n \frac{1}{x-1}ds \\
&= \frac{n+1}{1-x}\int_0^x s^n ds = \frac{n+1}{1-x}\left[\frac{s^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}$$

(ii) $\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \ (-1 < x \leq 1)}$

$\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}\log x = \dfrac{-1}{x^2}, \ldots, \dfrac{d^k}{dx^k}\log x = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$ より，
$f(x) \overset{\text{def}}{=} \log(1+x)$ と置くと，$f^{(k)}(x) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{d^k}{dx^k}f(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ なので，

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k + R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + R_{n+1}(x) \\
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}dt = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt
\end{aligned}$$

- $0 < x \leq 1$ なる x を固定すると，$0 \leq t \leq x \leq 1$ なので，$n \to \infty$ で
$$|R_{n+1}(x)| = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}dt \leq \int_0^x (x-t)^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \ \to \ 0$$

- $-1 < x < 0$ なる x を固定すると，$-1 < x \leq t \leq 0$ なので，$t \leq -tx \leq 0$ より，$0 \leq t - x \leq -tx - x = -x(1+t)$ が従う．よって，$0 \leq \dfrac{t-x}{1+t} \leq (-x)$ が成り立つ．そこで，$n \to \infty$ で（$x = -1$ では収束しない）
$$|R_{n+1}(x)| = \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}dt \leq (-x)^n \int_x^0 \frac{1}{1+t}dt = |x^n \log(1+x)| \ \to \ 0$$

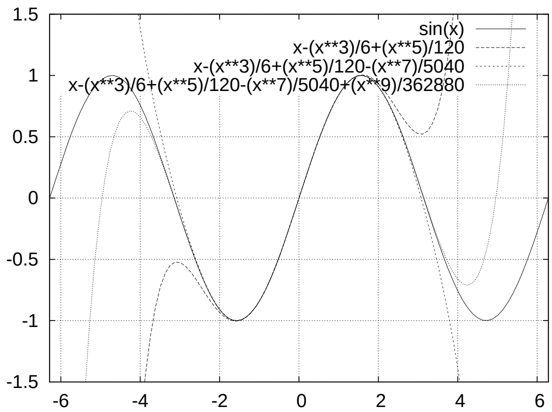
8. Taylor 展開（続）

三角関数の Taylor 展開と Taylor 級数

$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sin x$ と置き，$x = 0$ の周りの Taylor 展開を行う．

$$f^{(k)}(x) \ = \ \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right), \quad \begin{cases} f^{(2k)}(0) & = \sin(k\pi) = 0 \\ f^{(2k+1)}(0) & = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \end{cases}, \quad \text{より}$$

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k!} x^k + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \frac{1}{(2m+1)!}\int_0^x (x-t)^{2m+1} \sin(t+(m+1)\pi)dt
\end{aligned}
$$



さて，任意の x での Taylor 級数の収束 ($|R_{n+1}(x)| \to 0$ if $n \to \infty$) を示そう．

$$
|f^{(n+1)}(x)| = \left|\sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right| \leq 1 \, (-\infty < x < \infty) \quad \text{なので}
$$

$$
|R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| \leq \frac{1}{n!}\left|\int_0^x |x-t|^n dt\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0
$$

よって，$\sin x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

同様にして，

$$
\cos x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots
$$

練習

$\sin x$ や $\cos x$ と違い，$\tan x$ のテーラ展開: $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$ は複雑である（試しに最初の 3 項を計算せよ）． $\tan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{k!} x^k$ と置いた時の数列 $\{T_k | k = 0, 1, \ldots\}$ を Tangent 数と呼び，実際は，$\{0, 1, 0, 2, 0, 16, \ldots\}$ となり，右辺の級数は収束する．Tangent 数は以下で定義される数列と等しいことを示せ（難問）．

$$
T_0 = 0, \quad T_1 = 1, \quad T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k T_k T_{n-k} \quad (n \geq 1)
$$

ヒント： $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ およびベキ級数の微分が項別微分に等しいこと（後述）を利用する．

逆三角関数の Taylor 展開と Taylor 級数

$f(x) \overset{\text{def}}{=} \arctan x$ と置き，$x=0$ の周りの Taylor 展開を，定義通りに計算すると，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\ f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ f'''(x)=\frac{-2}{(1+x^2)^2}+\frac{8x^2}{(1+x^2)^3},\dots$$

より，$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-2,\dots$ を用いて，形式的に展開し，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=x-\frac{x^3}{3}+\dots$$

しかし，一般形を導き，また級数の収束を保証するのが大変である．そこで，$f(x)=\arctan x=\arctan 0+\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$ を利用する．

一般に，$y\neq 1$ の時，$\dfrac{1}{1-y}=1+y+y^2+\dots+y^n+\dfrac{y^{n+1}}{1-y}$ なので（**前述**），$y=-t^2$ と置けば，任意の実数 t に対して

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\dots+(-1)^n t^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2(n+1)}}{1+t^2}$$

よって，任意の x において，

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x\sum_{i=0}^{n}(-1)^i t^{2i}dt+\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}t^{2(n+1)}}{1+t^2}dt\\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2i+1}+R_{n+1}(x)\\
R_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1}\int_0^x\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}dt
\end{aligned}$$

そこで，$|x|\le 1$ の場合

$$|R_{n+1}(x)|=\left|\int_0^x\frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}dt\right|\le\left|\int_0^x t^{2(n+1)}dt\right|=\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}\le\frac{1}{2n+3}\ \to\ 0\ (n\to\infty)$$

よって，$\displaystyle \arctan x=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\frac{x^{2i+1}}{2i+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots\quad(|x|\le 1)$

- **系**：$\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}\ (\Leftrightarrow\ \tan\dfrac{\pi}{4}=1)$ より，π に関する不思議な関係

「グレゴリーの公式」が成立する：$\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dots$

例題 $\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{2\times 3} + \dfrac{3x^5}{8\times 5} + \dfrac{5x^7}{16\times 7} + \dfrac{35x^9}{128\times 9}\ldots\ (|x|<1)$

前述の $\arctan x$ と同様に，導関数 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の Taylor 展開（実際は Taylor 級数）を利用する．ただし，$\arctan x$ の場合は，その導関数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ の Taylor 展開の剰余項が,「積分」の形ではなく $\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}$ という簡単な式で表現できたが，$\arcsin x$ の場合は，$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の Taylor 展開の剰余項は，$\arcsin x$ の $(n+1)$ 階導関数を含む関数の「積分」の形で表現することになる．

よって（計算が面倒なので），それをサボるために先に $(\arcsin x)'$ を Taylor 級数（無限個の冪関数の和）で考え,「**積分と級数（無限和）の順序交換**」を利用することで，計算を簡単にする．

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の Taylor 級数展開には，$(1+a)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}a^k$ （一般化２項展開）を使えばよい．ただし $|a|<1$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{-1}{2})(\frac{-1}{2}-1)\ldots(\frac{-1}{2}-k+1)}{k!}(-1)^k x^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+k-1)}{k!}x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{2k}, \quad x^2<1.\end{aligned}$$

ただし，係数 $S_k \overset{\text{def}}{=} \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$ であり，最後の等式は以下の (i), (ii), (iii) の関係を利用して変形すれば導ける：

(i) $(\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{2}+1)\ldots(\dfrac{1}{2}+k-1) = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k}$,

(ii) $2^k k! = 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2(k-1)\cdot(2k)$, (iii) $(2k)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2k-1)\cdot(2k)$

よって，

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x (\arcsin t)'\,dt = \int_0^x \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} S_k t^{2k}\right) dt \quad (\text{ただし } |x|<1) \\ &= \int_0^x dt + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x S_k t^{2k} dt = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{2k+1}x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{2k+1}x^{2k+1}\end{aligned}$$

ここで，１行目から２行目へ移る $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} S_k t^{2k}\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x S_k t^{2k} dt$ の**定積分と級数（和）の順序交換**の正当性は，Taylor 級数の場合は，**幸運なことに,「冪（ベキ）級数の（収束範囲の内部での）一様収束性」から**示せる．しかし，次回のルベーグ積分とその収束定理を用いてより一般に示すこともできる．

9．<u>極限関数の連続性，微分可能性（復習）</u>

関数列の極限関数：

ある区間 $[a,b]$ 上で定義された関数列 $f_n(x)\,(n=1,2,\ldots)$ があるとして，任意の $c\in[a,b]$ を固定する毎に，実数列 $f_1(c),f_2(c),f_3(c),\ldots$ が極限値 $\lim_{n\to\infty} f_n(c)$ を持つ場合（※）は，$[a,b]$ 上で「関数列の極限関数 $f(x)$」が定義される．

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

※：厳密に書けば,「どんな小さな $\varepsilon>0$ を取っても，c に対応して番号 N が存在し，$m,n>N$ ならば，$|f_n(c)-f_m(c)|<\varepsilon$」．与えられた ε に対する N の大きさは c に依存してもよい．

関数列の一様収束：

関数列 $\{f_n(x)|x\in[a,b],\,n=1,2,\ldots\}$ が $f(x)$ に一様収束するとは，各 x での実数の収束 $f_n(x)\to f(x)$ の速さが，$x\in[a,b]$ に依らない．つまり，どんな小さな $\varepsilon>0$ を取っても，番号 N が存在し，$m,n>N$ ならば，どんな $x\in[a,b]$ に対しても，$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$．

言い換えると,「 $\lim_{n\to\infty}\max_{a\le x\le b}|f_n(x)-f(x)|=0$ 」を意味する（正確には max でなく sup）．単なる「収束」が点 x 毎の性質であるのに対し,「一様収束」は区間 $[a,b]$ 毎の性質である．

極限関数の連続性：

1. 各 n に対して，f_n が（少なくとも）ある一点 $x=c\in[a,b]$ で連続,
2. $\{f_n\}$ が $[a,b]$ で「一様収束」,

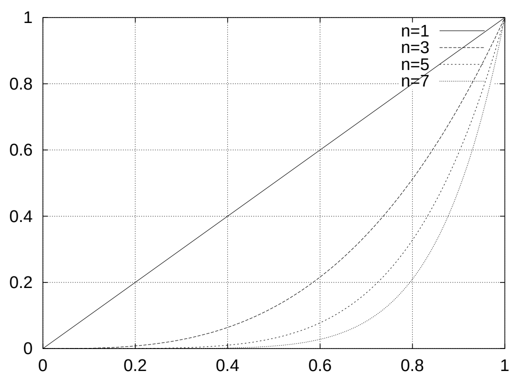
の両方が成り立つ時，$f(x)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ は（少なくとも）$x=c$ で連続.

- 一様収束でない収束する関数列の例：$f_n(x)=x^n\ (x\in[0,1]),\ n=1,2,\ldots$

$f_n(x)$ は，$[0,a]$（任意の $a<1$）で一様収束するが，$[0,1]$ では一様収束しない．実際，極限関数 $g(x)$：

$$g(x)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

は，$x=1$ で不連続.



極限関数の微分可能性，微分と極限の順序交換：

1. 各 n に対して，f_n が $[a,b]$ で微分可能で導関数（f'_n）が $[a,b]$ で連続,
2. $\{f'_n\}$ が $[a,b]$ で「一様収束」,
3. （少なくとも）ある $x=c\in[a,b]$ に対して，$f_n(c)$ が「収束」,

のすべてが成り立つ時,

- $\{f_n\}$ が $[a,b]$ で「一様収束」（そこで $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$），かつ
- $f(x)$ が $[a,b]$ で微分可能で導関数が連続であり，$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$

なお,「$f(x)$ が $[a,b]$ で微分可能で導関数が連続」とは，区間端では，$x=a$ での右微分が $\lim_{x\to a+0} f'(x)$ に等しく，$x=b$ での左微分が $\lim_{x\to b-0} f'(x)$ に等しいものとする.

級数関数の連続性，微分可能性，微分と級数和の順序交換

これを，**級数関数（関数項級数）**$\{h_m(x)|m=1,2,\ldots\}$ に当てはめ,

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{n} h_m(x)\ (x\in[a,b])$$

と置くと，$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} h_m(x)$ の連続性や項別微分の正当性の議論に使える.

$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} h_m(x)$ の右辺がすべての $x\in[a,b]$ で有限な時,

- $h_m(x)\ (m=1,2,\ldots)$ が $x=c$ で連続の時，$f(x)$ も $x=c$ で連続か？
- $h_m(x)\ (m=1,2,\ldots)$ が $x=c$ で微分可能な時，$f(x)$ も $x=c$ で微分可能で, かつ $f'(c)$ は $h'_m(c)$ の級数（和）に等しいか？

は，自明ではなく，上の一様収束性を調べる必要がある.

以下，より使いやすい（強い）条件で書くと,

- 連続性

    1. $h_m(x)$ が $[a,b]$ で連続，かつ
    2. $\sum_{m=1}^{n} h_m(x)\ (n\to\infty)$ が $[a,b]$ で「一様収束」，の時

  $f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} h_m(x)$ も $[a,b]$ で連続.

- 微分と級数和の順序交換（級数関数の項別微分）

1. $h_m(x)$ が $[a,b]$ で微分可能で，$h'_m(x)$ が連続，かつ
2. $\sum_{m=1}^{n} h'_m(x)\ (n \to \infty)$ が $[a,b]$ で「一様収束」，の時

– $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(x)$ も $[a,b]$ で微分可能で
– $f'(x)$ が連続であり，$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} h'_m(x)$

幸運なことに，**冪級数**（テーラー級数も含まれる）は，その収束円の**内部**で一様収束する．項別微分したものも冪級数で，かつ収束半径も変わらないので，同様である．よって，その範囲では項別微分してよい．

- **冪級数**ではない一般の級数では，上のような好都合が成り立つとは限らない．<u>自身は一様収束するが項別微分したものが一様収束しない級数</u>の例（後の講義で出てくるフーリエ級数）を示す．$f(x)\,[-\pi,\pi]$ は，最右辺のような級数形を持ち，その各項は任意の x で何階も微分できるが，一方，f の微分 $f'(x)$ は，$x=0$ で滑らかに微分できず，微分と級数和の順序交換は不成立.
  – $f(x) = \begin{cases} x+\pi & (-\pi \le x \le 0) \\ -x+\pi & (0 \le x \le \pi) \end{cases} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} \ldots\right)$
  – $f'(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi < x < 0) \\ \text{不定} & (x=0) \\ -1 & (0 < x < \pi) \end{cases} \neq -\dfrac{4}{\pi}\left(\sin x + \dfrac{\sin 3x}{3} + \dfrac{\sin 5x}{5} \ldots\right)$