応用解析学（電子２年）　　第６講

- ルベーグ積分と収束定理，級数関数の項別積分，積分関数の微分

前回復習

- （難問）$\tan x = T_0 + T_1 x + \dfrac{T_2}{2!}x^2 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{k!}x^k$ という Taylor 級数展開を示す．ただし，数列 $\{T_k | k = 0, 1, \ldots\}$ は以下のように定義される．

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 1, \quad T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k T_k T_{n-k} \quad (n \geq 1) \tag{1}$$

実際は $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ で級数は収束するが，以下の証明は，簡単な $|x| < 1$ の場合．

まず，$\tan x$ の Taylor 級数が,「$a < 1$ を満す任意の正数 a に対して，$|x| \leq a$ で収束する」と**仮定**する．冪級数なので（導関数も含め）一様収束かつ絶対収束する．

- $\tan 0 = 0$ より，$T_0 = 0$ が必要条件.
- $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ の関係を用いると，$|x| \leq a$ において，

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{k!}x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k}{(k-1)!}x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{n+1}}{n!}x^n = T_1 + T_2 x + \frac{T_3}{2!}x^2 \ldots \\
1 + \tan^2 x &= 1 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{k!}x^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{j!}x^j\right) = 1 + (T_0 T_1 + T_1 T_0)x + \ldots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T_k}{k!}x^k \frac{T_{n-k}}{(n-k)!}x^{n-k}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k T_k T_{n-k}\right)x^n
\end{aligned}$$

ただし，$(\tan x)'$ において，一様収束の仮定より級数の項別微分，$\tan^2 x$ において，絶対収束の仮定より級数の積の級数展開（コーシー積）が可能．

各係数の比較から，$T_1 = 1$，に始まる式 (1) の成立が**必要条件**になることがわかる．なお，これを用いて，T_2 以降を順次計算すると，

$$T_2 = {}_1C_0 T_0 T_1 + {}_1C_1 T_1 T_0 = 0,\ T_3 = {}_2C_0 T_0 T_2 + {}_2C_1 T_1 T_1 + {}_2C_2 T_2 T_0 = 0 + 2 + 0 = 2,$$

次に，式 (1) で定義される $\{T_0, T_1, T_2, \ldots\}$ に対して，$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_k}{k!}x^k$ を考え，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k}{(k-1)!}x^{k-1}$ が，$|x| \leq a < 1$ で収束すれば，$f'(x) = 1 + f^2(x)$ が言える．

これは，n によらずに，$\left|\dfrac{T_{n+1}}{n!}\right| \leq 1$ を示せば十分である．なぜなら，それが成り立てば，$|x| \leq a < 1$ において，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{T_k}{(k-1)!}x^{k-1}\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k$ の右辺は $n \to \infty$ 収束するから．以下，$\left|\dfrac{T_{n+1}}{n!}\right| \leq 1\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ を数学的帰納法で示す．

- $T_0 = 0$．$n = 0, 1$ で成り立つことは直接計算で確認（$|T_1/0!|, |T_2/1!| \le 1$）．
- $n \ge 2$ において，$k = 1, 2, \ldots n-1$ で $|T_{k+1}/k!| \le 1$ と仮定する．この時，$k = n$ でも成立（１行目の真ん中の等式は $T_0 = 0$ による）．

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{T_{n+1}}{n!}\right| &\le \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k|T_k||T_{n-k}| = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k|T_k||T_{n-k}| \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k-1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = \frac{2}{n}\left(1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}\right) \\
&\le \frac{2}{n}\left(1+\frac{n-2}{2}\right) = 1
\end{aligned}
$$

最後に，ここまでの証明は，$|x| < 1$ において $\boxed{f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{T_k}{k!}x^k}$ （ただし，$\{T_n\}$ は式 (1) で定義）が，

$$
f'(x) = 1 + f^2(x)\ (|x| < 1), \quad f(0) = 0 \tag{2}
$$

を満たすこと，および，逆に，式 (2) を満たし，かつべき級数展開できる関数は，式 (1) による係数を持つべき級数で定義される上の $f(x)$ しかないこと，を示した．$\tan x$ も上の $f(x)$ も式 (2) を満すが，$f(x) = \tan x$ を証明するには，さらに

- $\tan x$ がべき級数展開できる（テーラー展開の剰余項が 0 に収束），または，
- 「式 (2) を満す（１階連続微分可能な）関数は $\tan x$ の他にない」（一階常微分方程式の初期値問題 (2) の解の一意性），

の**どちらか**を示す必要がある．例えば，後者が成り立たない場合は，式 (2) を満すがべき級数展開できない関数があって，$\tan x$ はそれである可能性が残る．オンライン付録に後者の証明の粗筋を載せる．興味ある人は読んでみてほしい．

10. ルベーグ積分

フーリエ級数や偏微分方程式では実は (暗黙に) 積分としてはルベーグ (Lebesgue) 積分を扱う．ただし，理学部と教育学部（数学科・物理学科）以外では厳密に定義しない事が多く，本講義でも証明なしで概説する．

基本的には高校で習ったリーマン積分の拡張になっている．つまり，**有界閉区間 [a, b] 上で連続な関数**はリーマン積分可能であるが，そのような関数はルベーグの意味でも積分可能で，それぞれの定義から計算される積分値は等しい．その範囲で**関数の微分の逆演算**になっている．すなわち，$f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続ならば，$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)dt$ と置くと，$F'(x) = f(x) \quad (a < x < b)$ が成り立つ．なので，不定積分を使って定積分を計算できる．

非負関数 $f(x)$ に対して，直感的には，

- リーマン積分が，x **軸を小区間で区切り**，各区間（の右端または左端）での関数の高さ $f(x)$ と区間幅によって決まる長方形を，全区間にわたって足し合わせ，小区間の幅を縮めていくのに対して，
- ルベーグ積分は，y **軸（非負）を小区間で区切り**，関数の高さ $f(x)$ がその区間に入るような x の範囲（一般に不連続）とその区間の底までの高さによって決まる「長方形の並び」の面積を，全区間にわたって足し合わせ，小区間の幅を縮めていく．不正確に書くと，

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left(\text{区間の下の高さ}\left(\frac{k}{n}\right)\times\{x|\frac{k}{n}\leq f(x)<\frac{k+1}{n}\}\text{ の合計長}\right)$$

一般に，<u>**領域 E で定義された関数** $f(x)$ **（$x\notin E$ なら，$f(x)=0$）**</u>に対して，

$$f^+(x)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases} f(x) & (\{x\in E|f(x)\geq 0\})\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases},\ f^-(x)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases} -f(x) & (\{x\in E|f(x)<0\})\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

と置くと，$f(x)=f^+(x)-f^-(x)$ なので，ルベーグ積分を以下で定義する：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx\stackrel{\text{def}}{=}\int_{-\infty}^{\infty}f^+(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty}f^-(x)dx$$

「$f(x)$ が可積分」と「$|f(x)|$ が可積分」は同値で，$|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$.

- E が無限区間で関数が正負両方にまたがって値を取る場合，リーマン積分との本質的な違いが現れる．例えば，$\boxed{I\stackrel{\text{def}}{=}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx}$ を考える．
  - リーマン積分では，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{\sin x}{x}dx$ によって $I=I_R$ を定義し（異常積分と呼ぶ），この極限は有限値 $\frac{\pi}{2}$ であることが示せる．
  - ルベーグ積分では，$f(x)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\sin x}{x}$ と置いて，

    $$\int_0^{\infty}f^+(x)dx-\int_0^{\infty}f^-(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^n f^+(x)dx-\lim_{n\to\infty}\int_0^n f^-(x)dx$$

    によって $I=I_L$ を定義し，この極限は発散する（$\infty-\infty$）ことが示せるので，**ルベーグ積分としては積分可能ではない**．なお，ルベーグ積分でも，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n f^+(x)dx-\int_0^n f^-(x)dx\right)=\frac{\pi}{2}=I_R$ という等式は成立．よって，$f_n(x)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & 0<x\leq n\\ 0 & n<x\end{cases}$ と置くと，

    $$I_R=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}f_n(x)dx\neq\int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_0^{\infty}f(x)dx=I_L$$

    左辺は $\pi/2$，右辺は発散．

- **ルベーグの収束定理**（後述）：連続でない関数の積分も統一的に扱うことができ，極限操作に関する性質が扱いやすくなる．
- **ルベーグ積分の完備性**：「積分可能な関数」の全体（「関数空間」と呼ぶ）が，リーマン積分では**完備**でないが，ルベーグ積分に拡張することで完備化される．関数列 $f_n(x)$ がルベーグ積分可能で（$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx < \infty$ for $n = 1, 2, \ldots$），かつ，積分によって定義される関数間の距離の意味でコーシー列：
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_m(x) - f_n(x)|dx \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$
になっている時，ルベーグ積分可能なある関数 $f(x)$ が存在して，
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|dx \to 0 \quad (n \to \infty)$$
となる．これはリーマン積分の範囲では必ずしも成り立たない．

ルベーグ可積分な関数 f, g が，$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|dx = 0$ となるとき，「$f(x) = g(x)$ a.e. x」と書かれ，“$a.e.$ (almost everywhere)” は「ほとんど到る所」と読む．複数個（可算無限でもよい）の点を除外すれば一致する，という状況をイメージすればよい．ルベーグ積分では，$a.e.$ で同じ値を取る関数は同一視する．

Lebesgue の収束定理（積分と極限の順序交換）

実数上で定義された関数の列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ が以下の条件：

1. 実数 x (a.e.) を固定する毎に，$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) < \infty$
2. ある非負の可積分関数 g が存在して，$|f_n(x)| \leq g(x)$ a.e.x

を満たす時（十分条件．オンライン付録参照），以下が成り立つ：
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty \tag{3}$$
ただし，上の $A < \infty$ は，正確には $-\infty < A < \infty$（つまり $|A| < \infty$）の意味で使っている．以降も誤解の恐れがない場合はこの略記を使う．

有界区間で定義された連続関数の列が「一様収束」する時は，関数列の極限と積分の順序交換が可能．しかし，不連続関数には適用できない**強すぎる**条件であり，ルベーグの収束定理の方が本質に近い（が必要十分条件ではない）．

区間 $[0, 1]$ で，正の実数 a を固定して，$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a^n & (0 < x \leq 1/2^n) \\ 0 & (x = 0, 1/2^n < x \leq 1) \end{cases}$ を考える．すなわち，
$$f_1(x) = \begin{cases} a & (0 < x \leq 1/2) \\ 0 & (x = 0, 1/2 < x \leq 1) \end{cases}, \; f_2(x) = \begin{cases} a^2 & (0 < x \leq 1/4) \\ 0 & (x = 0, 1/4 < x \leq 1) \end{cases}, \; \ldots$$

※イメージが沸かない人は，$a = 1, 2, 3$ の 3 つの場合のグラフを書いてみる．
この時，どんな a に対しても，$f_n(x) \to 0\ (x \in [0,1])$ なので，

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0\, dx = 0$$

一方，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = a^n \times 2^{-n} = \left(\frac{a}{2}\right)^n \to \begin{cases} 0 & (0 < a < 2) \\ 1 & (a = 2) \\ \infty & (2 < a) \end{cases} \quad (n \to \infty).$

よって，$\boxed{0 < a < 2 \text{ でのみ，} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \text{ が}}$ 成り立ち，積分と極限の交換ができる．実際，

- $0 < a \leq 1$ の場合は，単に $g(x) = 1$（定数）を取れば，$n = 1, 2, \ldots$ で，

  $$|f_n(x)| = a^n \leq 1 = g(x) \quad (0 < x \leq 1)$$

  もちろん，$g(x)$ は $0 < x \leq 1$ で積分可能である．
- $1 < a < 2$ の場合は，$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{-\log_2 a}$ という関数を考えると，$g(x)$ は，$0 < x \leq 1$ で単調減少で，任意の $n = 1, 2, \ldots$ で，

  $$g(2^{-n}) = (2^{-n})^{-\log_2 a} = 2^{n \log_2 a} = a^n = f_n(2^{-n})$$

  となるので，$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (0 < x \leq 1)$.

  さらに，$a < 2$ より，$k = \log_2 a < 1$ なので，$g(x) = x^{-k}$ は，$0 < x \leq 1$ で積分可能である（第一回講義）．

よって，これらの $g(x)$ はルベーグの収束定理の仮定を満し，積分と極限の交換を保証する（十分条件になる）．
逆に，$2 \leq a$ の時は，これらの $g(x)$ のように，$f_n(x)$ を上から押える積分可能な関数は存在しない．

Beppo Levi の収束定理

一方，関数列が単調増大であれば，必要十分条件が存在する．実数上で定義された関数の列 $f_1(x), f_2(x), \ldots$ が単調増大（$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ a.e.）である場合，以下の条件 (A) と (B) は同値である．

(A) $f_n(x)$ の積分が有界．すなわち実数 M が存在し，$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx\right| < M$ for $\forall n$

(B) 関数列の極限と積分が交換可能．すなわち

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x) < \infty \ \text{ a.e. } x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx < \infty$$

いくつかの重要な系

(i) 級数の項別積分　ー　関数列 $f_1, f_2, \ldots$ に対し

1. 実数 a.e.x を固定する毎に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x) < \infty$
2. ある可積分関数 g に対し，$\displaystyle|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \le g(x)$ for $n \ge 1$, a.e.x

を満す時,（定）積分と級数操作の順序交換可：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx < \infty$$

(ii) 積分関数の連続性　ー　$(-\infty,\infty)\times[a,b]$ で定義された $f(x,t)$ に対し

1. $t \in [a,b]$ を固定する毎に，$\displaystyle F(t) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx < \infty$
2. a.e.x を固定する毎に，$f(x,t)$ は，$t \in [a,b]$ で連続
3. ある可積分関数 g に対し，$|f(x,t)| \le g(x)$ for a.e.$x, t \in [a,b]$

を満す時，$F(t)$ は $t \in [a,b]$ で連続．つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n = t$ $(t_n, t \in [a,b])$, として，

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t_n)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty} f(x,t_n)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx = F(t)$$

(iii) 積分関数の連続微分可能性

(ii) の条件に加え，さらに，

4. a.e.x を固定する毎に，$f(x,t)$ は，$t \in [a,b]$ で 1 回連続微分可能
5. ある可積分関数 h に対し，$\displaystyle\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right| \le h(x)$ for a.e.$x, t \in [a,b]$

を満す時，$F(t)$ は $t \in [a,b]$ で 1 回連続微分でき，積分と微分の順序交換可：

$$\frac{d}{dt}F(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx, \quad t \in [a,b]$$

練習

ガンマ関数（次回）$\displaystyle\Gamma(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ の導関数を示せ：

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\log t\, dt, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2\, dt$$

オンライン付録

A-1．微分方程式の初期値問題 (2) の解の一意性

以下に証明の道筋を示す.（常）微分方程式の講義では出てくる．本講義でも，後日，熱伝導の偏微分方程式の初期値問題の一意性を示すが，本質的には同様である．

２つの関数 f, g が式 (2) を満すと仮定する．どちらも $|x| \le a$ で連続なので有限な値 $M \overset{\mathrm{def}}{=} \max_{|x|\le a} |f(x) + g(x)|$ が定義できる．

そこで，$0 \le x \le a$ なる任意の非負の x に対して，

$$w(x) \overset{\mathrm{def}}{=} |f(x) - g(x)|,\ w(0) = 0,\ w(x) \ge 0$$

を考える．式 (2) より，

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = f^2(x) - g^2(x) = (f(x) + g(x))(f(x) - g(x))$$

$$f(x) - g(x) = \int_0^x (f(t) + g(t))(f(t) - g(t))dt$$

$$w(x) = |f(x) - g(x)| \le \int_0^x |f(t) + g(t)||f(t) - g(t)|dt \le M \int_0^x w(t)dt$$

さらに，同じ範囲で定義された関数 $h(x) \overset{\mathrm{def}}{=} e^{-Mx} \int_0^x w(t)dt$ を考えると，$h(0) = 0$，かつ

$$h'(x) = e^{-Mx}w(x) - Me^{-Mx}\int_0^x w(t)dt = e^{-Mx}\left(w(x) - M\int_0^x w(t)dt\right) \le 0$$

より，$h(x) \le 0$．よって，$\displaystyle\int_0^x w(t)dt = \frac{h(x)}{e^{-Mx}} \le 0$．しかし，$w(x) \ge 0$ なので，

$$0 = \int_0^x w(t)dt \quad (\forall x \in [0, a]) \quad \to \quad w(x) \equiv 0$$

A-2．Lebesgue の収束定理の補足

Lebesgue の収束定理は，ある１つの「十分条件」を示しており，必要十分条件ではない．つまり，定理の条件を満さないのに，式 (3) が成り立つ場合がある．

例えば，$0 \le p < 2$ に対して，

$$f_n(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} n^p & \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{p-1}}{n+1}dx = 0$ （$p < 2$ より）

- $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 0\,dx = 0$

なので，式 (3) が成り立つ．

しかし，$1 \leq p < 2$ の範囲では，実は，$f_n(x)$ を上から押えて，かつ積分可能な関数は存在しない．実際，$f^*(x) \overset{\mathrm{def}}{=} n^p \quad \left(\dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ と置くと（$0 < x \leq 1$ ），$f_n(x)$ を上から押える関数（つまり任意の n で $f_n(x) \leq g(x)$ となる関数）$g(x)$ は，必ず $f^*(x) \leq g(x)$ となるので，$1 \leq p$ より，その積分は発散する：

$$\int_0^1 g(x)dx \geq \int_0^1 f^*(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p-1}}{n+1} = \infty$$