応用解析学（電子２年）　　第７講

- ガンマ関数 $-\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^n dt \;=\; n!\,(n=0,1,\ldots)$ の一般化
- フビニ (Fubini) の定理，畳込み積分　→　累次積分の順序交換，重積分
- 電子版には訂正や付録あり：`http://nmlab.cse.kyutech.ac.jp/teaching/?lang=ja`

前回復習

積分と微分の順序交換の例：ガンマ関数 $\Gamma(x) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\;(x>0)$ の導関数：

$$\Gamma'(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt,\quad \Gamma''(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2\,dt$$

$\Gamma(x)$ の定義の積分記号の中の関数を x で１回及び２回微分したものの絶対値が，ある点 x_0 の近傍で（t に関する）可積分関数で押えられれば，

$$\Gamma'(x_0)=\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t}t^{x-1}\right)|_{x=x_0}dt,\quad \Gamma''(x_0)=\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{-t}t^{x-1}\right)|_{x=x_0}dt$$

が成り立つ（前回の Lebesgue の収束定理）．すなわち，

$$f(t,x)\overset{\text{def}}{=}e^{-t}t^{x-1},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=e^{-t}t^{x-1}\log t,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)=e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2$$

$$\Gamma'(x_0)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x_0-1}\log t\,dt,\quad \Gamma''(x_0)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x_0-1}(\log t)^2\,dt$$

以下，ルベーグの定理の条件が成り立つことを示す．自然数 k と，$0<a<A$ なる定数 a, A に対して，関数 $g_k(t)$ を定義する．

$$g_k(t)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases} t^{a-1}|\log t|^k & 0<t\le 1\\ e^{-t}t^{A-1}(\log t)^k & 1<t\end{cases}$$

まず，$g_k(t)$ が $(0,\infty)$ で可積分：$\displaystyle\int_0^\infty |g_k(t)|dt<\infty$ であることは，$t\to +0$ での $t^{a-1}, |\log t|^k$ の関係と，$t\to\infty$ での $e^{-t}, t^{A-1}, (\log t)^k$ の関係から，Γ 関数が可積分であることと同様な考え方で示せる．

次に，$0<t$ より，$0<e^{-t}<1$．また，任意の $p<q$ に対して，

$$t^p>t^q\quad(0<t<1);\quad t^p=t^q\quad(t=1);\quad t^p<t^q\quad(1<t)$$

より，$0<a\le x\le A$ なる x で，$t^{x-1}\le\begin{cases} t^{a-1} & 0<t\le 1\\ t^{A-1} & 1<t\end{cases}$．

よって，$x \in (a,A)$ である限り，すべての t に対して，
$|e^{-t}t^{x-1}(\log t)^k| \leq g_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ なので，任意の $x_0 \in (a,A)$ に対して，その近傍のすべての x で

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq g_1(t), \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\right| \leq g_2(t)$$

が言える．

ここで，$x_0 \in (a,A)$ の範囲を定めている $0 < a < A$ が任意に取れることから，結局，$(0,\infty)$ 内の任意の点 x で，

$$\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2 dt$$

なお，同様に $g_k(t)$ $(k=3,4,\ldots)$ を用いて，$\dfrac{d^k}{dx^k}\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^k dt$ が成り立つことを示せる．

11．ガンマ関数

第１講で，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^n dt = n!\ (n=0,1,\ldots)$ を計算した．これを拡張すると，正の実数 x の関数としてガンマ関数が定義される．

$$\Gamma(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2}s^{2x-1}ds, \quad x > 0$$

右側の等号（変形）は，$s=\sqrt{t}$ と変数変換し，$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} = \dfrac{1}{2s}$ より従う．

ここで，

(i) 各点 $x > 0$ を止める毎に，定義（中央の式）は有限確定値

(ii) 各点 $x > 0$ において連続（$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Gamma(x_n) = \Gamma(x)$）

であることを確かめておく．

(i) は，$t \geq 0$ なので，$0 < e^{-t} \leq 1$ より，$0 < e^{-t}t^{x-1} \leq t^{x-1}$．一方，指数関数とべき乗関数の強弱より，各固定した x に対して，十分大きな B を取れば，$B \leq t$ では，$e^{-t/2}t^{x-1} \leq 1$（つまり，$e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t/2}$）とできる．よって，

$$0 < \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt < \int_0^B t^{x-1}dt + \int_B^\infty e^{-t/2}dt < \infty\ (x > 0)$$

(ii) は，ルベーグの収束定理を用いて，x の任意の開区間 (a,A)（$0 < a < A$）での連続性を示すためには，任意の t で上から抑える可積分関数 $g(t)$ があればよい．
そこで，$g(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} t^{a-1} & 0 < t \leq 1 \\ e^{-t}t^{A-1} & 1 < t \end{cases}$ と置くと，$x \in (a,A)$ で $|e^{-t}t^{x-1}| \leq g(t)$ であり，かつ，

$$\int_0^\infty g(t)dt = \int_0^1 t^{a-1}dt + \int_1^\infty e^{-t}t^{A-1}dt < \infty$$

第２項は，(i) と同様に指数関数とべき乗関数の強弱関係から，有限だと言える．

ガンマ関数の性質

- $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2}ds = 2 \times \sqrt{\pi}/2 = \sqrt{\pi}$

  ただし，$\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}ds = \sqrt{\pi}$ （ガウスの積分）は後述.

- 自然数 k に対して，$\Gamma(k+\frac{1}{2})$

$$= (k-\frac{1}{2})\Gamma(k-\frac{1}{2}) = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2^k}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2k)!}{k!2^{2k}}\sqrt{\pi}$$

  最後の等式は，$(2k-1)(2k-3)\cdots 1 = \dfrac{(2k)!}{2k\cdot 2(k-1)\cdot 2(k-3)\cdots 2} = \dfrac{(2k)!}{k!2^k}$.

練習

上の性質：$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ をガンマ関数の定義から示し，それを利用して，n が非負整数の場合，$\Gamma(n+1) = n!$ を数学的帰納法で証明せよ.

ガンマ関数の形（概観）

- **(i)** ：$\Gamma''(x) > 0 \quad (x > 0)$ すなわち，下に凸.

前回練習問題より，$\Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}(\log t)^2 dt$. これより，右辺の積分記号内は非負で，かつ $\equiv 0$ ではないので，$\Gamma''(x) > 0$.

- **(ii)**：$\Gamma(x) \to \infty \ (x \to +0)$ 及び $\Gamma(x) \to \infty \ (x \to \infty)$

なぜなら，任意の定数 $A > 1$ を取れば，$x > 0$ より，

$$\Gamma(x) > \int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt \ge e^{-A}\int_0^A t^{x-1}dt = e^{-A}\frac{A^x}{x} \to \infty \ \text{ if } \ x \to +0 \ \text{ or } \ x \to \infty$$

なお，$x \to \infty$ の時の，$\Gamma(x)$ の増大の速度は次回のスターリングの公式.

例題１

積分で定義される関数 $F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-xt}\frac{\sin t}{t}dt \quad (0 < x)$ を考える.
これが実は，$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ であることを，以下の手順で示せ.

＜１＞ $F(x)$ は任意の $x > 0$ で有限確定値である（積分が収束する）.

＜2＞ $F(x)$ は任意の $x>0$ で微分可能で，$F'(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$ となる．

これより，$F(x) = C - \arctan x$ がわかる（C は積分定数）.

＜3＞ $F(x) \to 0\ (x \to \infty)$ が成り立つ．これより，$F(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ がわかる．

解答：

1＞ $|F(x)| \leq \displaystyle\int_0^\infty |f(x,t)|dt = \int_0^\infty e^{-xt}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt \leq \int_0^1 \left|\frac{\sin t}{t}\right|dt + \int_1^\infty e^{-xt}dt$

この最右辺の両項とも有限なので.

2＞ $f(x,t) \overset{\text{def}}{=} e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ と置く．x に関する微分と t に関する積分の順序交換ができるならば,

$F'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^\infty e^{-xt}\sin t dt = -\frac{1}{x^2+1}$

最左等号（順序交換の正当性）：$\forall a>0,\ (x,t) \in [a,\infty) \times [0,\infty)$ において,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt}|\sin t| \leq e^{-at},\ \text{かつ}\ \int_0^\infty e^{-at}dt < \infty$$

なので，ルベーグの収束定理を使える．最右辺の等式 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}\sin t dt = \frac{1}{1+x^2}$ は以前の練習問題参照.

3＞ $x \geq 1$ の範囲で，$|f(x,t)| = e^{-xt}\dfrac{|\sin t|}{t} \leq e^{-t}\dfrac{|\sin t|}{t} \leq \begin{cases} e^{-t} & 1 \leq t \\ \frac{|\sin t|}{t} & 0 < t < 1 \end{cases}$

となって，最右辺は $0 \leq t < \infty$ の範囲の積分が有限値になるので，ルベーグの収束定理が使えて,（x に関する）極限と（t に関する）積分が順序交換でき,

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \lim_{x\to\infty} f(x,t)dt = \int_0^\infty 0dt = 0$$

12. 重積分と累次積分

- 重積分（じゅうせきぶん，multiple integral）

  $\boldsymbol{x}$ を n 次元実数ベクトル (つまり，$\boldsymbol{x} \in R^n$)，$f(\boldsymbol{x})$ を多変数関数とする．R^n 内の領域 D 上での f の積分を「重積分」と呼び,
  $\displaystyle\int_D f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_D f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\cdots dx_n$ のように書く.

  – $\boldsymbol{x} \notin D$ で $f(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ と拡張し，一般に R^n 上での重積分を考える.

ルベーグ積分では，１次元の場合と同様に，y 軸（非負）を小区間で区切り，関数の高さ $f(\boldsymbol{x})$ がその区間に入るような $\boldsymbol{x}$ の領域（一般に不連続）とその区間の底の高さによって決まる「$(n+1)$-次元の立柱の並び」の体積を，全区間に渡って足し合わせ，小区間の幅を縮めていく．不正確には，非負値関数（$f(\boldsymbol{x}) \geq 0$）の場合，$\displaystyle\int_{R^n} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$

$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\left(\text{区間の下の高さ}\left(\frac{k}{n}\right)\times\{\boldsymbol{x}|\frac{k}{n}\leq f(\boldsymbol{x})<\frac{k+1}{n}\}\text{の総面積や総体積}\right)$$

- 累次積分（るいじせきぶん，repeated integral）

  $f(x_1,\ldots,x_n)$ を多変数関数として，各変数に関して，一変数ずつ（つまり１次元領域での積分として）順々に積分していったものを「累次積分」または「逐次積分」と呼ぶ．例えば，$x_1, x_2, \ldots$ の順に逐次積分する場合は，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cdots\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\right)\cdots\right)dx_n$$

Fubini（フビニ）の定理〜累次積分の順序交換

簡単のために２次元平面上の関数 $f(x,y)$ で記述する．$|f(x,y)|$ が**ある順序で累次積分可能ならば**，すなわち，

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dx\right)dy < \infty \quad \text{の時}$$

- $|f(x,y)|$ は逆順でも累次積分可能，かつ重積分可能で，それらの値は互いに等しい．さらに，
- $f(x,y)$ はどんな順序でも累次積分可能，かつ重積分可能で，それらの値は互いに等しい．つまり，以下が成り立つ：
  - $G^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|dy < \infty$ a.e.x
  - $I = \int_{R^2}|f(x,y)|dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x)dx$
  - $F(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx < \infty$ a.e.y, $G(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy < \infty$ a.e.x
  - $\int_{R^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} G(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y)dy < \infty$

注：１年次にリーマン積分に基づく累次積分の順序交換および重積分との関係を学んだ人は,「累次積分の結果から重積分の可能性を保証することができなかった」不便を覚えているかも知れない.

例題２ **半径 a の円の面積 $S(a)$**

領域の面積は領域上の単位関数（値が１の定数関数）の重積分で定義される．それを累次積分してよいことが，フビニの定理によって保証される．

$$
\begin{aligned}
S(a) &= \int_{x^2+y^2\le a^2} 1dxdy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{x^2\le a^2-y^2} 1dx\right)dy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} 1dx\right)dy \\
&= \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-y^2}dy = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(a\sqrt{1-\sin^2 t}\right)a\cos tdt = 2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt \\
&= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = a^2\left(\pi+\frac{1}{2}\left[\sin 2t\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \pi a^2
\end{aligned}
$$

ただし，変数変換：$y = a\sin t\,(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2})$ を行った．

畳み込み積分

関数 f, g が共に $(-\infty,\infty)$ で積分可能，つまり $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx<\infty$ の時，

$$(f*g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

を f と g の畳み込み積分 (convolution) と呼び，$(f*g)(x)$ は定義でき，かつそれ自身が積分可能．すなわち，以下が成立：

$$\boxed{(f*g)(x)<\infty \quad \text{かつ} \quad \int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|dx \le \left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\right)}$$

なぜなら， $|f(x-y)g(y)|$ を x から先に累次積分してみると，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|dx\right)dy &= \int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|dx\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\right)dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|dy\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\right) \ < \ \infty
\end{aligned}
$$

となって，無事 Fubini の定理の条件（仮定）を満すので，$(f*g)(x)<\infty$．さらに，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy\right|dx \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|dy\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)g(y)|dx\right)dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|dy\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx\right)
\end{aligned}
$$

性質　ー　関数 f, g, h が $(-\infty, \infty)$ で積分可能な時

- 交換則： $(f * g)(x) = (g * f)(x)$：y の積分を $z = x - y$ の積分へ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{\infty}^{-\infty} f(z)g(x-z)(-1)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz$$

- 結合則 $((f * g) * h)(x) = (f * (g * h))(x)$：$y$ の積分を $v = y + z$ の積分へ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f((x-z)-y)g(y)dy \right) h(z)dz =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f((x-v)g(v-z)dv \right) h(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(v-z)h(z)dz \right) dv$$

- 分配則： $(f * (g + h))(x) = (f * g)(x) + (f * h)(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)(g(y)+h(y))dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)h(y)dy$$

- **微分**：$\dfrac{d}{dx}(f * g)(x) = (f' * g)(x) = (f * g')(x)$
ただし，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx < \infty$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)|dx < \infty$，かつ，$f', g'$ が有界の場合.

$K(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x-y)g(y)$ と置く．$\dfrac{d}{dx}(f * g) =$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}K(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x-y)g(y)dy = (f' * g)(x)$$

これは，$|f'(y)| < M$ より，$|\dfrac{\partial}{\partial x}K(x,y)| \leq M \cdot |g(y)|$ が成り立ち，一方，
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty$ より，ルベーグ収束定理が使える.
さらに，交換則より，$\dfrac{d}{dx}(f * g)(x) = \dfrac{d}{dx}(g * f)(x) = (g' * f)(x) = (f * g')(x)$.

<u>重積分の置換積分</u>

R^n 上の座標変換 $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ によって，重積分の積分変数を変換すると，

$$\int_{R^n} f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{R^n} f(\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}))|J_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．$\det A$ を行列 A の行列式（determinant）として，$J_{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \det \left[\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \right]$
は変換 $\boldsymbol{\psi}$ のヤコビ行列の行列式で，ヤコビアンと呼ばれる.

2次元平面での極座標変換

2次元平面上で変換 $\boldsymbol{\psi}:(r,\theta)\leftrightarrow(x,y)$ を $\left\{\begin{array}{lll} x &=& r\cos\theta \\ y &=& r\sin\theta \end{array}\right.$ で定義する（極座標）．ただし，$0\le r, 0\le\theta<2\pi$．この時，ヤコビアンは,

$$
\begin{aligned}
J_{\boldsymbol{\psi}}(r,\theta) &= \det\left[\begin{array}{cc} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{cc} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{array}\right] \\
&= r\cos\theta^2 + r\sin\theta^2 = r \\
\int_{R^2} f(x,y)dxdy &= \int_{0\le r, 0\le\theta<2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)|r|drd\theta \\
&= \int_0^\infty r\left(\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta\right)dr \\
\text{かつ} &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty rf(r\cos\theta, r\sin\theta)dr\right)d\theta
\end{aligned}
$$

例題３ **ガウスの積分**

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^\infty\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}dx\right)dy = \int_{R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \int_{0\le r, 0\le\theta<2\pi} e^{-r^2}rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^\infty e^{-r^2}rdr\right)d\theta \\
&= 2\pi\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-t}dt = \pi\left[-e^{-t}\right]_0^\infty = \pi
\end{aligned}
$$

厳密にはフビニの定理の条件を確認する必要があるが，$e^{-(x^2+y^2)}$ は e^{-x^2} と e^{-y^2} の積として分離でき，各々，$x\to\infty$, $y\to\infty$ で急速に減少する（$x>1$ なら $e^{-x^2}<e^{-x}$）ので，ガンマ関数の値が有限であることと同様に，容易に示せる．例えば,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx \le 2\left(\int_0^1 dx + \int_1^\infty e^{-x}dx\right) < \infty$$

オンライン付録

A-1. 累次積分が順番に依存する例

＜1＞ $\displaystyle\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-t}\cos xt\,dt\right)dx = \frac{\pi}{2} \neq \int_0^\infty e^{-t}\left(\int_0^\infty \cos xt\,dx\right)dt$ ：（発散）.

左側の累次積分の計算を示す．$F(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\cos xt\,dt$ と置くと，以前やったように2回部分積分することで $F(x) = 1 - x^2F(x)$ が得られ，よって，$F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ となり，$\displaystyle\int_0^\infty F(x)\,dx = [\arctan x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$.

累次積分が順番に依存するので，フビニの定理の条件を満たさないはずであり，つまり，$G(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}|\cos xt|\,dt < \int_0^\infty e^{-t}\,dt < \infty$ と合わせると，$\displaystyle\int_0^\infty G(x)\,dx$ が発散することになり，重積分の意味では積分できない．

＜2＞ $f(x,y) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ for $(x,y)\in(0,1]\times(0,1]$, $f(x,y) \overset{\text{def}}{=} 0$ otherwise .

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$$

これもフビニの定理の条件を満たさないはずであり，重積分の意味では積分できない（発散）.

詳しく見ると，$f(x,y)$ は，$y\,(\in(0,1])$ を止める毎に有界なので，x に関して（ルベーグの意味でもリーマンの意味でも）積分可能である.

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

と変形して，有理関数の不定積分の計算を使うと，

$$\int f(x,y)dx = \frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y} - 2y^2\left(\frac{x}{2y^2(x^2+y^2)} + \frac{1}{2y^3}\arctan\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

なので，$\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dx = \left[-\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^1 = -\frac{1}{1+y^2}$ となり，y に関して積分可能で，

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy = -\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy = -[\arctan y]_0^1 = -\frac{\pi}{4}$$

逆順の累次積分を考えると，全く同様に，$f(x,y)$ は，$x\,(\in(0,1])$ を止める毎に有界なので，y に関して積分可能で，$\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^1 = \frac{1}{1+x^2}$ となり，x に関して積分可能で，

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

実際，$f(x,y)$ はフビニの定理の条件を満たさない．それをチェックすると，

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x,y)|dx &= \int_0^y \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \int_y^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{y} - \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=y}^{1} \\ &= \frac{y}{2y^2} - \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{y}{2y^2}\right) = -\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{y}\end{aligned}$$

となるが，この最後の式の第２項は，$y \in (0,1]$ で積分可能ではない（発散する）．
つまり，

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x,y)|dx\right) dy = \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{y}\right) dy = \infty$$

同様に，$\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x,y)|dy\right) dx = \infty$ となる．

A-2. $\boxed{\text{３次元空間での極座標変換}}$

３次元平面上で変換 $\boldsymbol{\psi} : (r,\theta,\phi) \leftrightarrow (x,y,z)$ を

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \quad , \quad 0 \le r, 0 \le \theta < \pi, 0 \le \phi < 2\pi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$$

で定義する（極座標）．この時，ヤコビアンは，

$$\begin{aligned} J_{\boldsymbol{\psi}}(r,\theta,\phi) &= \det\begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial\phi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial\phi \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial\phi \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = \ldots = r^2\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{R^3} f(x,y,z)dxdydz &= \int_{0\le r, 0\le\theta<\pi, 0\le\phi<2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) r^2\sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^\infty r^2 \int_0^\pi \sin\theta \int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) d\phi d\theta dr \\ &= \text{（その他の順序の累次積分）} \end{aligned}$$

A-3. 極座標変換を用いる定積分計算例

＜１＞ $\displaystyle\int_{x^2+y^2\ge 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dxdy$.

$p<1, p=1, 1<p$ で分けて考える．$p\neq 1$ で，

$$\int_{r\geq 1,\,0\leq\theta\leq 2\pi}\frac{r}{r^{2p}}drd\theta = 2\pi\int_1^\infty r^{1-2p}dr = \frac{2\pi}{2-2p}\left[r^{2-2p}\right]_{r=1}^\infty = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1} & (1<p) \\ \infty & (p<1) \end{cases}$$

$p=1$ で，

$$\int_{r\geq 1,\,0\leq\theta\leq 2\pi}\frac{r}{r^{2}}drd\theta = 2\pi\int_1^\infty r^{-1}dr = 2\pi\left[\log r\right]_{r=1}^\infty = \infty$$

＜2＞ $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}dxdy$.

$0\leq p<1, p=1, 1<p$ で分けて考える．

同様に，$\displaystyle\int_{0<r\leq 1,\,0\leq\theta\leq 2\pi}\frac{r}{r^{2p}}drd\theta = 2\pi\int_0^1 r^{1-2p}dr = \cdots = \begin{cases} \frac{\pi}{1-p} & (0\leq p<1) \\ \infty & (1\leq p) \end{cases}$

＜3＞ 半径 a の円の面積 $S(a)$ を，極座標変換を用いて計算せよ．本編例題 2 と比較せよ．

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{x^2+y^2\leq a^2} 1dxdy = \int_{0\leq r\leq a, 0\leq\theta\leq 2\pi} rdrd\theta \\ &= \int_0^a r\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)dr = \int_0^a rdr\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi = \pi a^2 \end{aligned}$$

＜4＞ 半径 a の球の体積 $V(a)$ を，極座標変換を用いて計算せよ．

$$\begin{aligned} V(a) &= \int_{x^2+y^2+z^2\leq a^2} 1dxdydz = \int_{0\leq r\leq a, 0\leq\theta<\pi, 0\leq\phi<2\pi} r^2\sin\theta drd\theta d\phi \\ &= \int_0^a r^2dr\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = \frac{a^3}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$