

- 一般化スターリングの公式
- ベータ関数
- 線形2階偏微分方程式 (熱伝導方程式, 波動方程式)

前回復習

ガンマ関数の性質

- $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = -[e^{-t} t^x]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty e^{-t} x t^{x-1} dt = -0 + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$
- n が非負整数の場合, $\Gamma(n+1) = n!$ を数学的帰納法で証明せよ.
 - これは, 「 $n=0$ の時は成り立つ」. なぜなら, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$.
 - 「 $n=k-1$ の時に成り立つことを仮定すると, $n=k$ の時にも成り立つ」. なぜなら, 任意の正数 x で, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ なので, $\Gamma(k) = (k-1)!$ を仮定すると, $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)! = k!$.

13. ガンマ関数の漸近表現 (スターリングの公式)

ガンマ関数の無限遠での漸近的振る舞いを表わす「一般化スターリングの公式」:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x} \quad (\text{自然数の場合 } n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})$$

この意味は, $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{2\pi} \quad (x \rightarrow \infty)$ である.

既に, $e^n \ll n! \ll n^n \quad (n \rightarrow \infty)$ は知ってるので, $e^x \ll \Gamma(x+1) \ll x^x \quad (x \rightarrow \infty)$ は類推できる.

t に関する積分において, $t = \sqrt{x}v + x, \left(v = \frac{t-x}{\sqrt{x}}, \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ の変数変換 ($t \leftrightarrow v$) を行うと, $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^x dt = \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-x-\sqrt{x}v} (x + \sqrt{x}v)^x \sqrt{x} dv$

$$= x^x e^{-x} \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-\sqrt{x}v} \left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}} \right)^x dv = x^x e^{-x} \sqrt{x} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-v\sqrt{x} + x \log(1 + \frac{v}{\sqrt{x}})} dv$$

つまり, $\frac{\Gamma(x+1)}{x^x e^{-x} \sqrt{x}} = \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-v\sqrt{x} + x \log(1 + v/\sqrt{x})} dv$. よって, 示したいことは:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\sqrt{x}}^\infty e^{-v\sqrt{x} + x \log(1 + v/\sqrt{x})} dv = \sqrt{2\pi}$$

要点は, (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-v\sqrt{x} + x \log\left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}}\right) \right) = -\frac{v^2}{2}$, (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \sqrt{2\pi}$, 及び (iii) 極限と積分の順序交換である. (i) は対数関数の Taylor 展開, (ii) はガウスの積分, (iii) はルベーグの収束定理から導かれる.

$$f(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-v\sqrt{x} + x \log(1 + v/\sqrt{x})} & v > -\sqrt{x} \\ 0 & v \leq -\sqrt{x} \end{cases}, \quad h(v) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-v^2/2}$$

とする. 示したいことは, 以下の2つである.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, v) = h(v) \quad (v \text{ を固定する毎, } -\infty < v < \infty) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, v) dv \quad (2)$$

式 (1) を示す. $\log(1 + y)$ の Taylor 展開より, $-1 < y \leq 1$ で,

$$\log(1 + y) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{y^k}{k} = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots$$

任意の v を固定して, $v^2 < x$ の範囲の x を考えると, $-1 < \frac{v}{\sqrt{x}} < 1$ なので

$$\begin{aligned} \log f(x, v) &= -v\sqrt{x} + x \log(1 + v/\sqrt{x}) \\ &= -v\sqrt{x} + x \left(\frac{v}{\sqrt{x}} - \frac{v^2}{2x} + \frac{v^3}{3x\sqrt{x}} - \dots \right) \\ &= -\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3\sqrt{x}} - \dots \end{aligned}$$

の等式が成立 (テーラー級数が収束) し, その v に対して, $v^2 < x \rightarrow \infty$ の時,

$$f(x, v) = e^{\log f(x, v)} \rightarrow e^{-v^2/2} = h(v) \quad (x \rightarrow \infty)$$

一方, 式 (2) は, Lebesgue の定理を用いる (オンライン付録参照).

14. ベータ関数

2変数 p, q (正の実数) の関数としてのベータ関数を定義する.

$$B(p, q) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \quad p > 0, q > 0$$

ガンマ関数やベータ関数は, 特殊関数 (Special Functions) と呼ばれ, 初等関数の組み合わせでは表現 (計算) できず, 積分や級数の形で表現される.

$$\bullet \quad B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

最右辺を利用すると, $B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$. また, m, n が自然数の場合
 の, $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ に対応する.

- 左の等号の証明は, $\cos^2 \theta = t$ と変数変換し, $\frac{dt}{d\theta} = -2 \cos \theta \sin \theta$ より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta &= \int_1^0 \frac{t^p (1-t)^q}{\cos \theta \sin \theta} \left(\frac{-1/2}{\cos \theta \sin \theta} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{1}{2} B(p, q) \end{aligned}$$

- 右の等号の証明は, $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-1} du$ として, ガウスの積分の計算技法を思い出すと,

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \left(\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-1} du \right) \left(\int_0^\infty e^{-v^2} v^{2q-1} dv \right) \\ &= 4 \int_{0 \leq u, 0 \leq v} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} dudv \\ &= 4 \int_{r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta dr d\theta \\ &= 4 \int_0^\infty \left(\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) dr \\ &= 4 \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \right) \end{aligned}$$

さらに, $r^2 = t$ の変数変換により, $\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr = \frac{1}{2} \Gamma(p+q)$

ベータ関数は様々な積分計算の中で現れる (オンライン付録参照).

応用

$$\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2}) \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+n}{2} + 1)} \quad (m, n \text{ は非負整数}). \text{ 例えば,}$$

- $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{5}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3/4)\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{16} \pi$
- $\int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{2} B(2, 2) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2) \Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{6} = \frac{1}{12}$
- $\int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \sin^4 \theta d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{6!4!}{5!3!4!2^{11}} \pi$

15. 線形 2 階偏微分方程式

偏微分方程式 (Partial Differential Equation, PDE)

一般に、多変数の滑らかな関数の偏導関数間に成り立つ「局所的」関係を記述する等式である（各点毎にその近傍で成り立つ）。特に物理的対象の状態の局所的な空間的・時間的変化を適当な近似の下でモデル化すると、これから見ていくように、線形 2 階偏微分方程式で記述でき、現象に応じた「決定条件」（初期値や境界値と呼ばれるような）を与えると、方程式を満すような関数（各点での状態を表わす）が大域的に一意に定まり、現象が一意に決定されることが知られている。これらは、数理物理とか物理数学の名で、古くから研究されてきた。例えば、

- 太鼓の膜の素材や張る面の大きさや形に関する情報から、どんな音が出るかを予測（計算）することができる。

一方、それを順問題と呼ぶならば、逆問題（既に起きている現象・状態が観測できるとして、その状態関数がちょうど解となるような決定条件や元の偏微分方程式の中の未知の係数などを決める）も研究されており、例えば、

- 太鼓の音を聴いて、膜の素材や張る面の形や大きさに関する情報を推理（計算）することができる。

(1) 熱伝導方程式

x 軸に沿って置かれた細い針金の温度分布を考える。時刻 t 位置 x での温度を関数 $u(t, x)$ とする。ある微少時間区間 $[t, t + \delta t]$ での、ある微少空間区間 $[x, x + \delta x]$ の熱の移動を考え、その端の点 (t, x) での温度の変化を記述する関係を導く。

- この場合、現象を支配する物理的な原理は
 - (i) ある区間への単位時間当の流入熱量 = 両端での温度勾配の差 \times 熱伝導率
 - * なぜなら、ある点での単位時間当の通過熱量 = 温度勾配 \times 熱伝導率。
 - (ii) ある区間への単位時間当の流入熱量 = 温度上昇 \times 比熱 \times 質量。
 - * なお、質量 = 線密度 \times 区間の長さ

以降、熱伝導率や比熱や密度が位置や時間で変化しないとする。

- (i) 微少時間区間 $[t, t + \delta t]$ において微少空間区間 $[x, x + \delta x]$ へ、その左端及び右端から流入する熱量 $Q(t, x, \delta t, \delta x)$ を、 C を針金の切口に対する熱伝導率として、左から $-C \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \delta t$ と右から $C \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \delta x) \delta t$ との和で近似：

$$Q(t, x, \delta t, \delta x) = C \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right) \delta t \approx C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \delta x \delta t \quad (3)$$

- (ii) 一方, その微少区間の midpoint でのその時間内の温度上昇は, $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x + \frac{\delta x}{2})\delta t$ で近似でき, それに必要な流入熱量は, 比熱を g , 一次元密度を ρ とすると,

$$Q(t, x, \delta t, \delta x) \approx \frac{\partial u}{\partial t}(t, x + \frac{\delta x}{2})\delta t g \rho \delta x \quad (4)$$

(3), (4) より, $\delta t, \delta x \rightarrow +0$ の極限において, 熱伝導方程式が成立:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{C}{g\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

実は, 溶液などの濃度の拡散も同じような伝導方程式で記述できる.

物理では通常, 3次元を扱う. 一般に, n -変数の 2 階偏微分の和を微分作用素 (作用素: 関数を別の関数へ写像する) とみて, ラプラシアンと呼ぶ:

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

これを使い簡潔に書くと: $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y, z) = a^2 \Delta u(t, x, y, z)$. ただし, a は正の実数.

(2) 波動方程式

x 軸に沿って置かれた細い弦の垂直方向の振動 (横波) を考える. 時刻 t 位置 x での垂直方向のずれ (変位) を関数 $u(t, x)$ とする. ある時刻 t での, ある微少空間区間 $[x, x + \delta x]$ の弦の運動 (力, 質量, 加速度) を考え, その点 (t, x) での変位の変化を記述する関係を導く.

- 重力を無視し, 弦の張力だけが作用している (無重力状態で考える).
- この場合 (弦の張力による) 現象を支配する物理的な原理は,
 - (i) ある区間で垂直方向に掛かる力 両端での変位勾配の差
 - * なぜなら, ある点で垂直方向に掛かる力 その点の変位勾配
 - (ii) ある区間で垂直方向に掛かる力 = 垂直方向加速度 \times 質量.
 - * なお, 質量 = 線密度 \times 区間の長さ
- ただし, 弦の変位は十分小さいとし, 近似的に以下を仮定する.

– 弦に沿った張力 T は一定. かつ, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)\right)^2 \approx 0$

- (i) 時刻 t に、微少区間の左端で弦に垂直方向にかかる力（上向きを正）は、弦の（水平に対する）傾きを $\theta = \theta(t, x)$ と置くと、 $-T \sin \theta(t, x)$. 同様に右端で弦に垂直方向にかかる力は、 $T \sin \theta(t, x + \delta x)$. よって、その差は以下のように近似できる：

$$\begin{aligned} F(t, x, \delta x) &= T(\sin \theta(t, x + \delta x) - \sin \theta(t, x)) \approx T \frac{\partial \sin \theta}{\partial x} \delta x \\ &= T \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta x = T \cos^3 \theta \frac{\partial \tan \theta}{\partial x} \delta x \\ &= T \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \delta x \approx T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \delta x \quad (5) \end{aligned}$$

ただし、 $\frac{\partial u}{\partial x} = \tan \theta(t, x)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial \tan \theta}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}(t, x)$ である . また、次の変形： $\cos^3 \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-\frac{3}{2}}$ を用いた .

- (ii) 一方、一次元密度 ρ の微少区間の弦の質量は $\rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \delta x$

微少区間の midpoint での垂直方向加速度は、 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x + \frac{\delta x}{2})$. そこで、力 = 加速度 \times 質量より、

$$F(t, x, \delta x) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x + \frac{\delta x}{2}) \rho \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \delta x \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x + \frac{\delta x}{2}) \rho \delta x \quad (6)$$

(5), (6) より、 $\delta x \rightarrow +0$ の極限において波動方程式が成立：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$$

練習

- 1 > 任意の正定数 a , 定数 c に対して、関数 $u(t, x) = t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{4a^2 t}\right)$ は、

一次元熱伝導方程式： $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ を、 $0 < t, -\infty < x < \infty$ の範囲で満す（微分して示せ）. $t = 0$ では定義されない点に注意 .

- 2 > a を正の定数とし、2 回連続微分可能な任意の一変数関数 ϕ （ファイ）と ψ （プサイ）に対して、関数 $u(t, x) = \phi(x + at) + \psi(x - at)$ は、一次元波

動方程式： $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ を、 $-\infty < t, x < \infty$ の範囲で満す（微分して示せ）.

オンライン付録

A-1. 極限と積分の順序交換

式 (2) を示す . この $x \rightarrow \infty$ での収束と順序交換を保証する十分条件として , Lebesgue の定理を用いるためには , ある可積分な関数 $g(v)$ が , x がある値 a より大きい時 ($x > a$) に , $|f(x, v)| \leq g(v)$ となればよい .

$$g(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, v) = h(v) = e^{-v^2/2} & (v \leq 0) \\ f(1, v) = e^{-v}(1+v) & (v \geq 0) \end{cases}$$

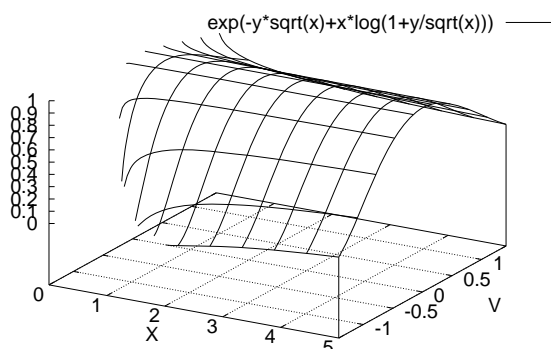
と置くと , $a = 1$ でそうなる . つまり ,

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} g(v) dv < \infty . \text{ かつ , } 0 \leq f(x, v) \leq g(v) \quad (x > 1, v > -\sqrt{x})$$

を言えばよい . 前者は明らか . なぜなら ,

$$\int_{-\infty}^0 h(v) dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}} < \infty, \quad \int_0^{\infty} f(1, v) dv = \int_0^{\infty} e^{-v}(1+v) dv < \infty$$

後者は , $f(x, v)$ が以下の性質を満すことを示せばよい . 実際 , $f(x, v)$ のグラフは (ただし , $0 < x \leq 5, -\sqrt{2} \leq v \leq \sqrt{2}$) , 次のようになる .



1. $-\sqrt{x} < v \leq 0$ で $f(x, v) \leq f(\infty, v)$ ($x > 1$) となるためには , x に関して増加 . つまり , $\frac{\partial}{\partial x} f(x, v) \geq 0$ ($-\sqrt{x} < v \leq 0, x > 0$) . これは , $f(x, v) > 0$ より , 以下の性質に置換えても等価である .

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x, v)}{f(x, v)} = \frac{\partial}{\partial x} \log f(x, v) \geq 0$$

2. $v \geq 0$ で $f(x, v) \leq f(1, v)$ ($x > 1$) となるためには , x に関して減少 . つまり , 同様に , 以下の性質に置換えても等価である .

$$\frac{\partial}{\partial x} \log f(x, v) \leq 0$$

この1.と2.は, $\frac{\partial}{\partial x} \log f(x, v)$ が v に関して単調減少し, $v = 0$ では0になることから導ける. つまり以下の2つの式を証明すればよい.

$$\frac{\partial}{\partial x} \log f(x, 0) = 0 \quad x > 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} \log f(x, v) \leq 0 \quad v > -\sqrt{x}, x > 0 \quad (8)$$

• 式(7)は, $f(x, 0) = e^0 = 1$ より自明. 式(8)を以下に示す.

$\log f(x, v) = -v\sqrt{x} + x \log \left(1 + \frac{v}{\sqrt{x}} \right)$ は, $v > -\sqrt{x}, x > 0$ の範囲では2階導関数が連続になり, よって偏微分する変数の順序を交換できる(全微分可能)ので,

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} \log f(x, v) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \log f(x, v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-\sqrt{x}v}{\sqrt{x} + v} \right) = \frac{-v^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + v)^2} \leq 0$$

A-2. ベータ関数を使った計算

< 1 > 実数 $a < b$ に対して, $\int_a^b (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1} dx = (b-a)^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ を示せ.

$a < x < b$ で, $\frac{x-a}{b-a} = t$ と置けば, $0 < t < 1$, $1-t = \frac{b-x}{b-a}$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{b-a}$ より

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1} dx &= (b-a)^{p+q-2} \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} (b-a) dt \\ &= (b-a)^{p+q-1} B(p, q) \quad (p, q > 0) \end{aligned}$$

これを利用して, $\int_{-1}^1 (1+x)^n (1-x)^n dx = 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ が計算できる(後日, ルジャンドル多項式で使う)

< 2 > $\int_0^\infty \frac{r^a}{(1+r^2)^b} dr = \frac{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(b-\frac{a+1}{2})}{2\Gamma(b)}$ を示せ.

ただし, a, b は実数で $a > -1$, $b > \frac{a+1}{2}$.

$\frac{r^2}{1+r^2} = t$ と置くと, $1-t = \frac{1}{1+r^2}$, $\frac{dt}{dr} = \frac{2r}{(1+r^2)^2} = 2t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}$, より

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{(1+r^2)^b} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{a}{2}} (1-t)^{b-\frac{a}{2}} t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, b-\frac{a+1}{2}\right)$$