応用解析学（電子２年）　　第９講

- 線形２階偏微分方程式（ラプラス方程式）
- フーリエ級数展開

前回復習

＜1＞ **一次元熱伝導方程式を満たす関数の「例」**：

任意の正定数 a，任意の定数 c に対して，関数 $u(t,x) = t^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{(x-c)^2}{4a^2 t})$ は，$\boxed{\text{一次元熱伝導方程式：} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)}$ を，$0 < t$, $-\infty < x < \infty$ の範囲で満す．$t = 0$ では定義されない点に注意.

計算: $g(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(x-c)^2}{4a^2 t}$ と置くと，$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x) = -\frac{(x-c)^2}{4a^2 t^2}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = \frac{x-c}{2a^2 t}$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \left(-\frac{1}{2}t^{-3/2} + t^{-1/2}\left(-\frac{\partial g}{\partial t}\right)\right)e^{-g(t,x)} = \left(-\frac{1}{2}t^{-3/2} + \frac{(x-c)^2}{4a^2}t^{-5/2}\right)e^{-g(t,x)} \\
\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= t^{-1/2}\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right)e^{-g(t,x)} = -\frac{x-c}{2a^2}t^{-3/2}e^{-g(t,x)} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= -\frac{t^{-\frac{3}{2}}}{2a^2}\left(1 + (x-c)\left(\frac{x-c}{2a^2}\right)t^{-1}\right)e^{-g(t,x)} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{(x-c)^2}{4a^2}t^{-\frac{5}{2}}\right)e^{-g(t,x)}
\end{aligned}
$$

これは，仮想的に時刻 $t = 0$ において位置 $x = c$ の無限小区間（質点）にある量の熱量が瞬間的に置かれた状態から出発した，無限に長い棒上の温度を表している．時刻 $t = 0$ では，$x = c$ の点のみ温度が無限大で，他の点の温度は 0 であるが，次の瞬間に熱が移動し，全域で温度が変化する（伝わる速度無限大）.

＜2＞ **一次元波動方程式を満たす関数の「例」**：

a を正の定数とし，２回連続微分可能な任意の２つの一変数関数 ϕ（ファイ）と ψ（プサイ）に対して，$\boxed{\text{関数 } u(t,x) = \phi(x+at) + \psi(x-at)}$ は，一次元波動方程式 $\frac{\partial u^2}{\partial t^2}(t,x) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ を，$-\infty < t, x < \infty$ の範囲で満たす.

計算: $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = a(\phi'(x+at) - \psi'(x-at))$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = a^2(\phi''(x+at) + \psi''(x-at))$,
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi'(x+at) + \psi'(x-at)) = \phi''(x+at) + \psi''(x-at)$ となる.

これは，$\psi(x)$ の形の波が形を崩さずに右（x-正）方向に速度 a で進み，$\phi(x)$ の形の波が形を崩さずに左方向に速度 a で進んでいる場合を表している（伝わる速度有限）．ただし，見かけ上 x-軸方向の移動がない波（定常波）も表現できる．例えば，$\psi(x) = \phi(x) = \sin x$ の場合，$u(t,x) = \sin(x+at) + \sin(x-at) = 2\sin x \cos at$.

実は逆に，上の一次元波動方程式を $-\infty < t, x < \infty$ の範囲で満たす滑らかな関数 $u(t,x)$ に対して，必ず２つの（同一でもよい）滑らかな一変数関数 ϕ, ψ が存在し，和の形で書ける： $u(t,x) = \phi(x+at) + \psi(x-at)$ （→オンライン付録）．

15b. **線形２階偏微分方程式**（続）

(3) ラプラス方程式

３次元実空間での熱伝導や波動において，十分長い時間経過後，各点の温度や変位が時間に対して変化しなくなり平衡状態（定常状態）とみなせる場合は，
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x,y,z) = 0$, $\dfrac{\partial u^2}{\partial t^2}(t,x,y,z) = 0$, なので，空間分布 $u(x,y,z)$ は以下を満す．

$$\Delta u(x,y,z) = 0$$

一般に， $\Delta u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ を n-**次元ラプラス方程式**と呼び，その解を「**調和関数**」と呼ぶ．

なお，熱伝導方程式，波動方程式，ラプラス方程式は，各々，放物形，双曲形，楕円形と呼ばれる（→オンライン付録）．

- **ラプラス方程式を満たす関数の「例」**

n 次元空間において，点 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と原点の距離を $r(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ と置くと，以下の関数 $u(\boldsymbol{x})$ は，調和関数（→オンライン付録）．

$$u(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} r(\boldsymbol{x})^{2-n} \quad (n=1, n \geq 3), \qquad u(\boldsymbol{x}) \overset{\text{def}}{=} -\log r(\boldsymbol{x}) \quad (n=2)$$

16. **Fourier 級数展開**

$[-\pi, \pi]$ 上で定義される任意の二乗可積分な１変数実数値関数 f に対して，周期 2π の周期関数 $f(x)$ （$f(x) = f(x+2\pi)$ for $\forall x$．ただし，$f(-\pi) \neq f(\pi)$ の場合は，どちらかに合わせる）とみなす時，

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

を，$f(x)$ の Fourier 級数展開と呼び，実数列 $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ を，Fourier 展開係数と呼ぶ．大雑把には次の等式が成立（厳密には後で述べる **(i)**, **(ii)**, **(iii)**）：

$$f(x) \ = \ \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

有限ベクトル空間で任意ベクトルを基底ベクトルの和で表現することに似て，

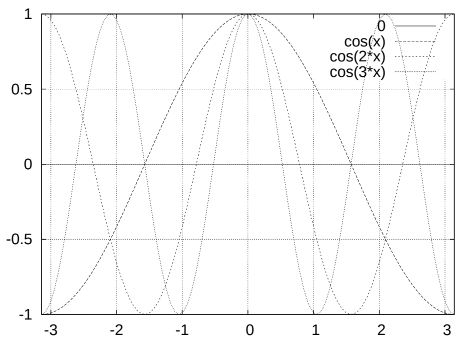
- 有限閉区間の１変数実数値関数の集合を「ベクトル空間」とみなし，その空間において任意の点（関数）を基底（三角関数）の和で表現する．

  次回以降，**偏微分方程式の初期値境界値問題**の解を構成する時に利用する．

上の等式がもし成り立つ場合に，各 Fourier 展開係数がこの形である理由は（例えば a_n の場合），項別積分を認めれば以下のように示せる．

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\right)\cos nx dx \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \\
&\quad \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx+b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx\right) \\
&= a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = a_n\pi
\end{aligned}$$

より，係数 a_n は，$\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$ に等しいことが必要．



上の計算で（m, n は自然数），$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx = \begin{cases}\pi & m=n \\ 0 & m\neq n\end{cases}$，

$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx = \begin{cases}\pi & m=n \\ 0 & m\neq n\end{cases}$，... 等の**直交性**を利用する．**次回参照**.

Fourier 級数展開と元の関数の関係

(i) $f(x)$ が区分的に滑らかな場合，Fourier 級数は収束し，次の等式が成り立つ：

$$\frac{\lim_{\varepsilon\to+0} f(x+\varepsilon)+\lim_{\varepsilon\to+0} f(x-\varepsilon)}{2} = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (1)$$

ただし，区間 $[a,b]$ で区分的に滑らかとは，$[a,b]$ が有限個の小区間 $[a_i, a_{i+1}]$$(a = a_0 < \cdots < a_n = b)$ に分割でき，各小区間内部において，$f'(x)$ が連続かつ有

限であること．この精密な結果は証明は，例えば以下を参照：「大学演習応用数学１（吉田 耕作, 加藤 敏夫； 裳華房）」の III 章の例題１．４．

なお，$f(x)$ が点 x で連続ならば左辺は $f(x)$ なので，その点 x では以下が成立．

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(ii) 加えて，$f(x)$ がすべての点 x で「**連続**」な場合は，上の右辺の級数は，**絶対収束かつ（x に関して）一様収束**し，

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (2)$$

これが最も強い条件での結果であり，次回の講義でこの命題の証明の流れを説明する．ただし，**そこでは連続性は本質的ではなく**，次項の性質が,「ベクトル空間」での基底展開としての「フーリエ級数」の基になっている．

(iii) 一般的に，$f(x)$ が「**二乗可積分**」な場合（**区分的滑らかさや連続性がなくても**），右辺と左辺の差の２乗の積分が０に近づく．つまり，

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right)^2 dx \;=\; 0 \qquad (3)$$

これを『$f(x)$ のフーリエ級数が $f(x)$ に**２乗平均（積分）収束**する』と呼ぶ．

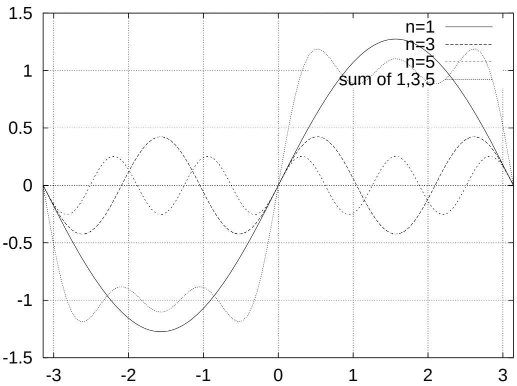
- **注：**$f(x)$ が奇関数の場合は，偶関数 $\cos nx$ との積が奇関数になり，a_0, a_n の積分は０になる．逆に，$f(x)$ が偶関数の場合は，奇関数 $\sin nx$ との積が奇関数になり，b_n の積分は０になる．
- 一般の $f(x)$ の場合，$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + f(-x)$, $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - f(-x)$ と置くと，g は偶関数，h は奇関数になり，$f(x) = \dfrac{g(x)+h(x)}{2}$ と表現でき，この時以下が成り立つ．

$$g(x) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad h(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

例題

- 以下の周期 2π の階段関数を Fourier 級数展開せよ．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ -1 & -\pi < x < 0 \end{cases}$$



Fourier 展開係数を定義通りに計算すると，

$$\begin{aligned}
a_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0, \quad a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \\
b_n &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-\sin nx)dx + \int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) \\
\cos n\pi &= \begin{cases} 1 & n\text{が偶数} \\ -1 & n\text{が奇数} \end{cases} \text{より，} \quad 1-\cos n\pi = \begin{cases} 0 & n\text{が偶数} \\ 2 & n\text{が奇数} \end{cases}
\end{aligned}$$

つまり，この例は，a_0, a_n は 0（f が奇関数なので）．b_n は，n が偶数の時は 0. ここで，$n = 2m-1,\ m = 1, 2, \ldots$，として，

$$b_{2m} = 0,\ b_{2m-1} = \frac{4}{(2m-1)\pi}$$

$-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で考えると，$f(x)$ は，$x \neq -\pi, 0, \pi$ では連続．よって，$x \neq -\pi, 0, \pi$ では以下の等式が成立.

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}\sin(2m-1)x = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}\ldots\right)$$

$f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で連続なので，フーリエ級数展開に代入すると，以前，arctan 関数の Taylor 級数展開からも導いた**グレゴリーの公式**が再び現れる：

$$\begin{aligned}
1 &= f(\frac{\pi}{2}) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi}{2}\ldots\right) \\
\frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots
\end{aligned}$$

Fourier 級数の周期区間の一般化

$f(x)$ の周期が 2π でない（$2T$ とおく）場合でも，$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\frac{T}{\pi}x)$ とおけば，$g(x)$ が周期 2π として Fourier 級数展開でき，その展開の中で $x = \frac{\pi}{T}y$ とおけば，$f(y)$ は周期 $2T$ として Fourier 級数展開できる．よって，

- 一般に，$2T$ を周期とする，連続かつ区分的に滑らかな関数 $f(x)$

は，以下のように Fourier 級数展開でき，級数は絶対収束かつ一様収束する．

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{n\pi x}{T}),\ a_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)dx,$$

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx,\ b_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx$$

例題２

- 関数 $f(x) = x^2\ (-\pi \le x \le \pi)$ を Fourier 級数展開せよ．

フーリエ展開係数を定義通りに計算．$f(x) = x^2$ が偶関数なので，$b_n = 0$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[x^2 \cdot \frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot \frac{\sin nx}{n} dx\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\left(\left[-x \cdot \frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx\right) \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\left(\left[-x \cdot \frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx\right) \\
&= -\frac{2}{n^2\pi}\left(-\pi\cos n\pi - \pi\cos n(-\pi) + \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= -\frac{2}{n^2\pi}(-2\pi\cos n\pi + 0) \ = \ \frac{4}{n^2}\cos n\pi \ = \ \frac{4}{n^2}(-1)^n
\end{aligned}
$$

$f(x) = x^2\ (-\pi \le x \le \pi)$ はその範囲で連続なので，$-\pi \le x \le \pi$ で,

$$
\begin{aligned}
f(x) \ = \ x^2 \ &= \ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \ = \ \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \\
&= \ \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 4x}{16} - \dots\right)
\end{aligned}
$$

ここで，また級数に関する面白い等式が得られる．

- $f(0) = 0$ より，$\dfrac{\pi^2}{12} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \cdots$
- $f(\pi) = \pi^2$ より，$\dfrac{\pi^2}{6} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \cdots$

練習

関数 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases}$ を（周期 π ではなく）周期 2π で拡張した関数の Fourier 級数展開を求めよ．

ヒント：周期 2π の関数への拡張方法が何通りか考えられる．どれも正解である．つまり，元の（部分）関数が同じでも，異なる拡張から異なるフーリエ級数展開が得られる．それらのフーリエ級数は，元の関数が連続である点ではその同じ関数値へ収束する．

オンライン付録

A-1. 一次元波動方程式の一般解

一次元波動方程式 $\dfrac{\partial u^2}{\partial t^2}(t,x) = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$ を，$-\infty < t, x < \infty$ の範囲で満たす滑らかな関数 $u(t,x)$（つまり無限に長く限りなく細い弦の振動）に対して，必ず２つの（同一でもよい）滑らかな一変数関数 ϕ, ψ が存在し，和の形で書ける：

$$u(t,x) = \phi(x+at) + \psi(x-at)$$

ただし，上の一次元波動方程の解 $u(t,x)$ は時刻 $t=0$ での形や勢い（速度）を与えていないのでそもそも一意ではない．$u(t,x)$ が異なれば ϕ, ψ も異なる．また，$u(t,x)$ が同じでも，ϕ, ψ は和に意味があるので，定数分の自由度はある．

これは以下のように示せる．変数（座標）変換：$\eta = x + at, \xi = x - at,$ を行い，$w(\eta, \xi) = u(t,x)$ と置く．$\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = a = -\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$，$\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 1$，$\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi}$ を用いて，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial w}{\partial \eta}(\eta(t,x), \xi(t,x)) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \xi}(\eta(t,x), \xi(t,x)) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = a\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a\frac{\partial^2}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}\right) \\
&= a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)
\end{aligned}$$

同様に

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$$

よって，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -4a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi}(\eta(t,x), \xi(t,x))$ であり，任意の (t,x) で（左辺）$=0$ なので，$\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi}(\eta, \xi) = 0$．

そこで，$\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial w}{\partial \xi}(\eta, \xi)\right) = 0$ より，$\dfrac{\partial w}{\partial \xi}(\eta, \xi) = \dfrac{\partial w}{\partial \xi}(0, \xi)$ は η に依らず，$\psi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^\lambda \frac{\partial w}{\partial \xi}(0, \xi) d\xi + C$ と置いて一変数関数 ψ を定義すると（C は任意の定数），$\dfrac{\partial w}{\partial \xi}(\eta, \xi) = \dfrac{d\psi}{d\xi}(\xi)$ となる．

さらに，$\dfrac{\partial}{\partial \xi}(w(\eta, \xi) - \psi(\xi)) = 0$ より，$w(\eta, \xi) - \psi(\xi) = w(\eta, 0) - \psi(0)$ は ξ に依らず，$\phi(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} w(\eta, \xi) - \psi(\xi)$ と置いて一変数関数 ϕ を定義する．

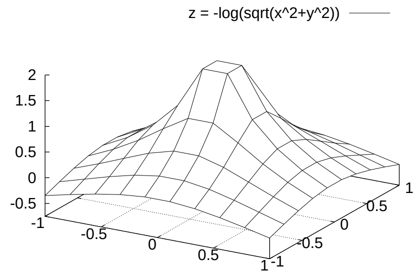
よって，$u(t,x) = w(\eta, \xi) = \phi(\eta) + \psi(\xi) = \phi(x+at) + \psi(x-at)$

A-2．一般次元での調和関数の例

n 次元空間において，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と置いて，n 変数関数 $r = r(\boldsymbol{x})$ を，原点からの距離：$r(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ とすると，以下の関数 $u(\boldsymbol{x})$ は，原点を除いた領域（つまり，$\boldsymbol{x} \neq (0, \ldots, 0)$）において調和関数である．

$$u(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} r(\boldsymbol{x})^{2-n} \quad (n = 1, n \geq 3), \qquad u(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -\log r(\boldsymbol{x}) \quad (n = 2)$$

次図は，$n = 2$ の例．関数の値 $u(x, y)$ は，原点では正無限大に発散し，$r \to \infty$ に伴い，負無限大に発散する．



$w(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} r^2 = \sum_i x_i^2$ と置き，次式を利用する：$\dfrac{\partial w}{\partial x_i} = 2x_i \; (i = 1, 2, \ldots n)$

$n = 2$ の場合：

$$\begin{aligned}
u(x_1, x_2) &= -\log\sqrt{w(x_1, x_2)} = -\frac{1}{2}\log w(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{1}{2w}\frac{\partial w}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{w}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{x_i}{w^2}\frac{\partial w}{\partial x_i} - \frac{1}{w} = \frac{2x_i^2}{w^2} - \frac{1}{w} \\
\Delta u(x_1, x_2) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{2x_1^2}{w^2} - \frac{1}{w} + \frac{2x_2^2}{w^2} - \frac{1}{w} = \frac{2w}{w^2} - \frac{2}{w} = 0
\end{aligned}$$

$n > 2$ の場合：

$$\begin{aligned}
u(x_1, \ldots, x_n) &= w^{1-n/2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \left(1 - \frac{n}{2}\right) w^{-n/2}\frac{\partial w}{\partial x_i} = (2-n)x_i w^{-n/2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= (2-n)\left(x_i\left(-\frac{n}{2}\right) w^{-n/2-1} \cdot 2x_i + w^{-n/2}\right) \\
&= (2-n)w^{-n/2}\left(-\frac{n x_i^2}{w} + 1\right) \\
\Delta u(x_1, \ldots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = (2-n)w^{-n/2}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{n x_i^2}{w} + 1\right) \\
&= (2-n)w^{-n/2}(-n + n) = 0
\end{aligned}$$

A-3. ３次元空間上の波動方程式を満たす関数の例

$$\frac{\partial u^2}{\partial t^2}(t,x,y,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,x,y,z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,x,y,z)$$

を，$-\infty < t,x,y,z < \infty$ の範囲で考える．任意の点 (ξ,η,ζ) と 2 回連続微分可能な一変数関数 ϕ,ψ を与える時（ξ はグザイ，η はイータ，ζ はツェータ，と読む），関数

$$u(t,x,y,z) = \frac{1}{r(x,y,z)}(\phi(r(x,y,z)+t) + \psi(r(x,y,z)-t)) \quad (x,y,z) \neq (\xi,\eta,\zeta)$$

は，上の波動方程式を満たす．ただし，$r(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ は点 (ξ,η,ζ) からの距離.

- これは，空間上において，点 (ξ,η,ζ) の同心球状に，波が外側に拡大する様子（ψ が基本の形であるが，外に行くほど振幅が小さくなる）と内側に収縮する様子（ϕ が基本の形であるが，内に行くほど振幅が大きくなる）を表している．ただし，波が進む速度は 1 である．

これを示すには，この等式の左辺と右辺の偏微分の計算をひたすら頑張る．
t-方向の（偏）微分は，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{r(x,y,z)}(\phi'(r(x,y,z)+t) - \psi'(r(x,y,z)-t)), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{r(x,y,z)}(\phi''(r(x,y,z)+t) + \psi''(r(x,y,z)-t))
\end{aligned}$$

一方，x-方向は， $w(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} r^2 = x^2+y^2+z^2$ と置き，

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial x}\phi(w(x,y,z)^{1/2}+t) = \phi'(w^{1/2}+t)\cdot\frac{1}{2}w^{-1/2}\frac{\partial w}{\partial x}$$

などを使って，

$$\begin{aligned}
u &= w^{-1/2}(\phi(w^{1/2}+t) + \psi(w^{1/2}-t)), \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{2}w^{-3/2}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot(\phi+\psi) + w^{-1/2}(\phi'+\psi')\cdot\frac{1}{2}w^{-1/2}\frac{\partial w}{\partial x} \\
&= -w^{-3/2}x(\phi+\psi) + w^{-1}x(\phi'+\psi') \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{3}{2}w^{-5/2}\frac{\partial w}{\partial x}x(\phi+\psi) - w^{-3/2}(\phi+\psi) - w^{-3/2}x(\phi'+\psi')\cdot\frac{1}{2}w^{-1/2}\frac{\partial w}{\partial x} \\
&\quad -w^{-2}\frac{\partial w}{\partial x}x(\phi'+\psi') + w^{-1}(\phi'+\psi') + w^{-1}x(\phi''+\psi'')\cdot\frac{1}{2}w^{-1/2}\frac{\partial w}{\partial x} \\
&= (3x^2w^{-5/2} - w^{-3/2})(\phi+\psi) + (-3x^2w^{-2}+w^{-1})(\phi'+\psi') + x^2w^{-3/2}(\phi''+\psi'')
\end{aligned}$$

y, z-方向も同様．そこで，$w = x^2 + y^2 + z^2$ を使って，

$$\begin{aligned}\Delta u &= (3w^{-3/2} - 3w^{-3/2})(\phi + \psi) + (-3w^{-1} + 3w^{-1})(\phi' + \psi') + w^{-1/2}(\phi'' + \psi'') \\ &= w^{-1/2}\left(\phi''(w^{1/2} + t) + \psi''(w^{1/2} - t)\right) = \frac{1}{r}(\phi''(r + t) + \psi''(r - t))\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{1}{r(x, y, z)}(\phi''(r(x, y, z) + t) + \psi''(r(x, y, z) - t)) = \Delta u$

A-4．線形２階偏微分方程式の分類

n-次元変数を $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と置いて，関数 $u(\boldsymbol{x})$ が，点 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ の近傍ですべての２階偏導関数を持つ場合，すなわち，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$ $(i, j = 1, 2, \ldots n)$ が存在する場合，ある (i, j) の組に対して，

- もし $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})$ も $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x})$ も $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ で連続ならば，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{p}) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{p})$

以下では，考えている範囲内のすべての点 $\boldsymbol{x}$ で，すべての２階偏導関数が連続な場合を考える．この時，実定数係数 $a_{ij}, b_k, c \quad (1 \le i, j, k \le n)$，を持つ**２階線形微分作用素** L：

$$L \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k}^{n} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} + c$$

を定義すると，線形２階偏微分方程式とは，未知関数 u，既知関数 f に対して，

$$Lu(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x})$ なので，$a_{ij} = a_{ji}$ として一般性を失わない．なぜなら，$a_{ij} \neq a_{ji}$ の場合は，$\dfrac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ を改めて a_{ij}（よって a_{ji}）と置きなおしても作用素 L は変わらないから．

ここで，２階偏導関数の係数行列 A：$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ の n-次の特性方程式：

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

を考えると，A は対称行列なので，高々n 個の特性根（固有値）λ はすべて実根．この時，２階線形微分作用素 L は，以下の３通りに場合分けされる．(i) **楕円形**：特性根 λ はすべて正または負の同符号．(ii) **双曲形**：特性根 λ のいくつかは正，他は負．(iii) **放物形**：特性根 λ の中に 0 が含まれる．これらの分類の名称は，平面上の２次曲線の分類に由来する（以下参照）．

- ラプラス方程式 $\Delta u = 0$ は楕円形．なぜなら，3-変数関数とみて，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{より特性方程式は} \quad (1-\lambda)^3 = 0$$

- 波動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ は双曲形．なぜなら，4-変数関数とみて，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{より特性方程式は} \quad -(1-\lambda)(1+\lambda)^3 = 0$$

- 熱伝導方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ は放物形．なぜなら，4-変数関数とみて，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{より特性方程式は} \quad -\lambda(1+\lambda)^3 = 0$$

最後に，ｘｘｘ形の名前の由来である平面上の２次曲線の分類を補足する．一般の２次曲線：

$$C:\ ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + h \ = \ 0$$

に対して，特性行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有多項式は,

$$g(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \det(A - \lambda E) = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$$

となり，固有値を求めるための二次方程式 $g(\lambda) = 0$ は,
判別式：$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ より，実根を１つ ($a = c, b = 0$ の場合) または２つ持つ.

- $a = c, b = 0$ の場合，曲線 C は円
- そうでない場合，異なる２実根を λ_1, λ_2 と置くと，曲線 C は，直交変換（平行移動，回転）によって，形を変えずに,

  $$C':\ \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + dx + ey + f \ = \ 0$$

  に移動できる．この時，$g(\lambda) = 0$ の根と係数の関係から,

  $$g(0) \ = \ ac - b^2 \ = \lambda_1\lambda_2 \begin{cases} > 0 & \text{２つの実根が同符号} \quad \Leftrightarrow \ \text{楕円} \\ = 0 & \text{0 が根} \quad \Leftrightarrow \ \text{放物線} \\ < 0 & \text{２つの実根が異符号} \quad \Leftrightarrow \ \text{双曲線} \end{cases}$$