応用解析学（電子２年）　　第10講

- 完備な内積空間（ヒルベルト空間）・完全正規直交系とフーリエ級数

前回復習

$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases}$ を周期 2π で拡張した関数の Fourier 級数展開.

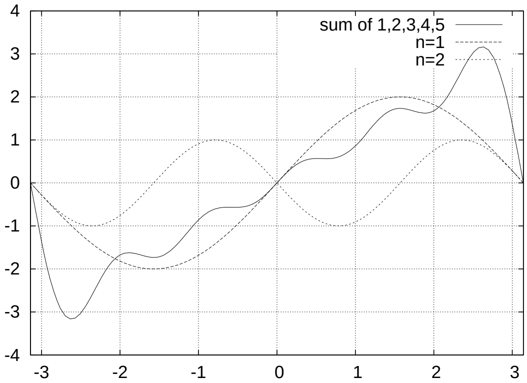
計算を簡単にするために，$[-\pi, 0)$ へ「奇関数」または「偶関数」として拡張する．どれも正答である．元の部分関数が同じでも，拡張して得られる関数が異なるので，異なるフーリエ級数展開が得られる．

- 奇関数として拡張した： $f_O(x) = \begin{cases} x & -\pi < x < \pi \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$ のフーリエ級数展開

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = 0 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{n\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx - [x\cos nx]_{-\pi}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(\frac{1}{n}[\sin nx]_{x=-\pi}^{\pi} - (\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi))\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}(-2\pi)\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

$x \neq -\pi, \pi$ において（$f_O(x)$ が連続なので），$f_O(x) =$

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \\
= \ & 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)
\end{aligned}
$$



$x = \dfrac{\pi}{2}$ において，またまた**グレゴリーの公式**が出現：$\left(\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots\right)$

$$
\frac{\pi}{2} = f_O(\frac{\pi}{2}) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}, \ \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1 & n = 1, 5, 9, \ldots \\ -1 & n = 3, 7, 11, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}
$$

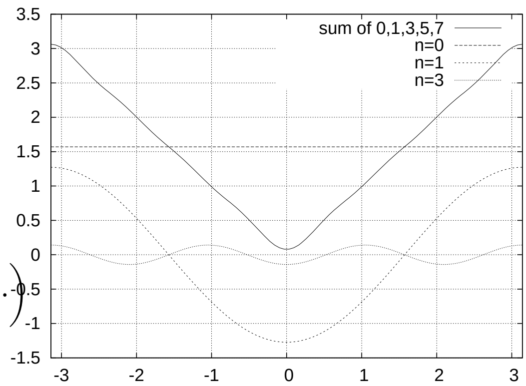
- 偶関数として拡張した： $f_E(x) = \begin{cases} x & 0 < x < \pi \\ -x & -\pi < x < 0 \\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$ のフーリエ級数展開

この $f_E(x)$ は $x \neq -\pi, \pi$ において連続であり，

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_E(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_E(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx = \ldots \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0 & (n = 2m) \\ -\frac{4}{n^2\pi} & (n = 2m-1) \end{cases} \end{aligned}$$

$x \neq -\pi, \pi$ において（$f_E(x)$ が連続なので），$f_E(x) =$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)^2\pi}\cos(2m-1)x \\ = \ & \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) \end{aligned}$$



17. 完備内積空間（ヒルベルト空間）

ベクトル空間（復習）

集合 H のすべての要素に対して，和，実（定）数倍が定義されていて，

- 和に関して閉じていて（$f, g \in H \ \Rightarrow \ f + g \in H$），和の結合則と交換則が成立し，零元（$\mathbf{0}$）と逆元（$f$ に対し $-f$ と書く）が存在.
- 実数倍に関して閉じていて（$f \in H, k \in R \Rightarrow kf \in H$），実数倍と和の分配則が成立（$R$ は実数全体を指す）.

を満たすとき，H を実係数ベクトル空間と呼ぶ.

以下で実際にイメージするのは，実数値関数のある部分集合（関数空間）H である．H の要素 f とは，ある具体的な関数を指す.

具体例:「$H = L^2$: 2 乗可積分な 1 変数関数の全体」$f \in L^2 \ \Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$.
この時，H は，その要素（関数）に対して以下の自明な加法と実数倍を定めた時，それに関する（無限次元の）ベクトル空間になっている．すなわち，

- H 上の等価，和，実数倍を定義：
  - $f = g \in H \ \Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$
    $\Leftrightarrow \ f(x) = g(x) \quad -\infty < x < \infty \ \ a.e.x$ （ほとんど至る所）

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad -\infty < x < \infty \ a.e.x$
- $(kf)(x) = kf(x) \quad -\infty < x < \infty \ a.e.x$

として，以下が成立することは容易に示せる．

- $f, g \in H \ \Rightarrow \ f+g \in H$, $f \in H, k \in R \ \Rightarrow \ kf \in H$
- 零元：$\mathbf{0}$ は定数関数 $0 \ a.e.x$
- 逆元：$f + g = \mathbf{0}$ ならば，$g(x) = -f(x) \ a.e.x$

内積空間

実係数ベクトル空間 H 上にある**内積** $< \cdot, \cdot >$ を定義する．内積とは，以下の性質を持つ，$H \times H \ \rightarrow \ R$（$R$ は実数全体）の写像．$f, g, h \in H$, $k \in R$ として，

$$
\begin{aligned}
&< f, f > \geq 0, \quad < f, f >= 0 \ \Leftrightarrow \ f = \mathbf{0}, \quad < f, g >=< g, f >, \\
&< kf, g >= k < f, g >, \quad < f+g, h >=< f, h > + < g, h >
\end{aligned} \tag{1}
$$

- 要素 f と g が「**直交**する」とは，$< f, g >= 0$ となること．

内積から,「ノルム（大きさ，ベクトルの長さ）」と「**距離**」が定義される．

- 要素 f のノルム：$||f|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{< f, f >} \geq 0$
- 要素 f, g 間の距離を $||f - g||$ で定義する．

性質：任意の H，任意の $f, g \in H$ に対して以下の 1. から 6. が成立（6. は無限次元の場合のみ）.（→証明はオンライン付録）

1. $< f, \mathbf{0} >= 0$
2. コーシー＆シュワルツ不等式：$| < f, g > | \leq ||f|| \cdot ||g||$
3. 三角不等式：$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$
4. 中線定理：$||f + g||^2 + ||f - g||^2 = 2(||f||^2 + ||g||^2)$
5. ピタゴラスの定理：$g_1, g_2, \ldots, g_n \in H$ が互いに直交し，かつノルムが 1，すなわち，$< g_i, g_j >= 0 \, (i \neq j)$ かつ $||g_i|| = 1$ の時（**正規直交系**と呼ぶ），

$$||f||^2 = \sum_{k=1}^{n} < f, g_k >^2 + ||f - \sum_{k=1}^{n} < f, g_k > g_k||^2$$

   平面上の直角三角形のピタゴラスの定理は $n = 1$ で説明できる．

6. **ベッセル (Bessel) 不等式**：無限列 $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots \in H$ が互いに直交し，かつノルムが 1，すなわち，正規直交系の時，

$$\sum_{k=1}^{\infty} < f, g_k >^2 \leq \ ||f||^2 < \infty$$

これはピタゴラスの定理が任意の n で成り立つことから自明．なお左辺の無限級数が有限値に収束することを保証している．

具体例として，2 乗可積分関数の集まり L^2 と演算：$< f, g > \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$（$f, g \in L^2 = H$）は,「内積空間の定義」を満し，しかも無限次元なので，上の 1 から 6 の性質を持つ．しかし，ここでの議論や性質は，H や内積の具体的な与え方によらず，抽象的な定義のみから導かれるものである．

ヒルベルト空間

ベクトル空間 H が，与えられた内積から導かれる距離に関して「**完備**」な場合，その空間をヒルベルト (Hilbert) 空間と呼ぶ．完備とは，その距離に関して「任意のコーシー列が収束列になる」こと．すなわち，$\{f_1, f_2, \ldots\}$（$f_m \in H$）が与えられた時，$\forall k = 1, 2, \ldots$ に対して，$||f_m - f_{m+k}|| \to 0 \ (m \to \infty)$ が成り立つならば，ある $f \in H$ が存在して，$||f_m - f|| \to 0 \ (m \to \infty)$ が成り立つ，ことである．

18. 完全正規直交系

ヒルベルト空間 H 内の要素（実際に想定するのは関数）の列 $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \}$ が，

- 正規直交性：$< \psi_m, \psi_n >= \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$
- 完全性：$< f, \psi_m >= 0 \quad \text{for} \ \forall m = 1, 2, \ldots \ \Leftrightarrow \ ||f|| = 0$

を満たす時,「**完全正規直交系**」と呼び，以下が成り立つ：

- 任意の $f, g \in H$ に対して， $c_m \stackrel{\text{def}}{=} < f, \psi_m >, \ d_m \stackrel{\text{def}}{=} < g, \psi_m >$ と置くと：

(i) 距離 $|| \cdot ||$ での級数の収束： $\lim_{m \to \infty} ||f - \sum_{n=1}^{m} c_n \psi_n|| = 0$

(ii) Parseval の等式： $< f, g >= \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} c_n d_n$.

特に，$g(x) = f(x)$ とすると， $||f||^2 = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} c_n^2$.

(iii) 級数展開係数の一意性

$$c_n = d_n \ \text{for} \ \ \forall n = 1, 2, \ldots \ \Leftrightarrow \ ||f - g|| = 0 \ \Leftrightarrow \ f = g \ \in H$$

これら (i), (ii), (iii) の性質は,

- 有限次元ベクトル空間の任意の要素（ベクトル）が，次元数の（正規直交）基底ベクトルの和として一意に表現できること，の拡張になっている．

証明

(i) まず， $f_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{m} c_n\psi_n(x)$ と置くと， $||f_m - f_{m+k}||^2$

$$=< f_m - f_{m+k}, f_m - f_{m+k} >=< \sum_{n=m+1}^{m+k} c_n\psi_n, \sum_{l=m+1}^{m+k} c_l\psi_l >= \cdots = \sum_{n=m+1}^{m+k} c_n^2 .$$

ここで正規直交系の Bessel **の不等式**： $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} < f, \psi_n >^2 \leq ||f||^2 < \infty$ より，最右辺 $\sum_{n=m+1}^{m+k} c_n^2$ は $m \to \infty$ の時に $\to 0$ となる．

よって， $\{f_m\}_{m=1,2,\ldots}$ は H 上のコーシー列であり，H が**完備**という仮定から，ある $f^* \in H$ が存在して，$\{f_m\}$ が収束する： $||f_m - f^*|| \to 0$

元の問題に戻ると，**三角不等式**より，

$$||f - \sum_{n=1}^{m} c_n\psi_n|| = ||f - f_m|| \leq ||f - f^*|| + ||f^* - f_m||$$

であり，右辺第 2 項は $m \to \infty$ の時に $\to 0$ なので，後， $||f - f^*|| = 0$ を示せば証明終り．さて，任意の $n = 1, 2, \ldots$ を固定して，

- $< f_m, \psi_n > \to < f^*, \psi_n >$ $(m \to \infty)$
  なぜなら，$| < f_m - f^*, \psi_n > |^2 \leq ||f_m - f^*||^2||\psi_n||^2 = ||f_m - f^*||^2 \to 0$（不等号は**シュワルツ不等式**より）
- $m \geq n$ ならば， $< f_m, \psi_n >=< \sum_{k=1}^{m} c_k\psi_k, \psi_n >= c_n < \psi_n, \psi_n >= c_n$
  なお，$m < n$ ならば， $< f_m, \psi_n >= 0$
- 上の 2 つから， $< f^*, \psi_n >= \lim_{m\to\infty} < f_m, \psi_n >= c_n =< f, \psi_n >$

よって，各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して $< f^* - f, \psi_n >= 0$ となり， $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ の**完全性**から， $||f - f^*|| = 0$ がいえる．

(ii) $A_m \stackrel{\text{def}}{=}< f - \sum_{n=1}^{m} c_n\psi_n, g - \sum_{l=1}^{m} d_l\psi_l >$ と置き，シュワルツ不等式と (i) より，

$$|A_m|^2 \leq ||f - \sum_{n=1}^{m} c_n\psi_n||^2||g - \sum_{l=1}^{m} c_l\psi_l||^2 \to 0$$

よって，$A_m \to 0\,(m \to \infty)$．一方，$A_m$ を展開すると，

$$
\begin{aligned}
A_m &= < f,g > - \sum_{n=1}^{m} c_n < g,\psi_n > - \sum_{l=1}^{m} d_l < f,\psi_l > + \sum_{n=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} c_n d_l < \psi_n,\psi_l > \\
&= < f,g > - \sum_{n=1}^{m} c_n d_n
\end{aligned}
$$

(iii) $< f-g,\psi_n >=< f,\psi_n > - < g-\psi_n >= c_n - d_n = 0$ がすべての n で成り立つので，$\{\psi_n\}$ の完全性から，$||f-g|| = 0$

H が完備ならば，H 上の正規直交系 $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ に対して，次の 3 つは同値.

- $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ の完全性
- $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を基底とする級数展開が H 上の距離の意味で収束 (i)
- Parseval の等式 (ii)．つまり Bessel 不等式の等号化

Fourier 級数との関係

さて，ここからは，具体的なヒルベルト空間 H として「区間 $I=[-\pi,\pi]$ 上で二乗可積分な関数の全体」$L^2(I)$ を考え，内積として 2 つの関数の積の区間 I での積分値を取る．すなわち，

- $f \in L^2(I) \;\Leftrightarrow \int_I |f(x)|^2 dx < \infty, \quad < f,g > \stackrel{\text{def}}{=} \int_I f(x)g(x)dx$
- この時，$L^2(I)$ は，ノルム $||f|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{< f,f >}$ に関して「**完備**」になる（Riesz-Fischer の定理）．これは，証明なしで認めることにする．
- **（復習）** x の区間 I 上で定義された関数列 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ の関数 $g(x)$ への収束性：　$n \to \infty$ の時，
  - 各点収束：$\forall x \in I\ (|f_n(x)-g(x)| \;\to\; 0)$
  - 一様収束：$\max_{x\in I} |f_n(x)-g(x)| \;\to\; 0$
  - 2 乗平均（積分）収束：$\int_I |f_n(x)-g(x)|^2 dx \;\to\; 0$

そこで，$L^2(I)$ の関数 $f(x)$ と完全正規直交系の性質を満たす関数列 $\{\psi_n(x)\}_{n=1,2,\ldots}$ に対して，前述の命題が成り立つ（ただし，$c_n =< f,\psi_n >$）．すなわち，
(i)：$\lim_{m\to\infty} \int_I |f(x) - \sum_{n=1}^{m} c_n\psi_n(x)|^2 dx \;=\; 0$ （2 乗平均収束），(ii) Parseval の等式：
$\int_I f(x)^2 dx = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} c_n^2$，$(iii)$：級数展開係数の一意性.
実は，さらに以下が成り立つ.

(iv) もし区間 I 上で，関数 $f(x)$ **が連続** & $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} c_n\psi_n(x)$ （すなわち $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$ ）**が一様収束**するなら，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x) = f(x)$ （一様収束（もちろん各点収束））

(v) **項別微分**：もし区間 I の内部で，$\psi_n(x)$ が１回連続微分可能で，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n'(x)$ が一様収束するなら，$f(x)$ も１回連続微分可能で，$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n'(x)$ （一様収束（もちろん各点収束））

(iv) の証明：$c_n \stackrel{\text{def}}{=} < f, \psi_n >$, $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)$ と置く．一様収束性より項別積分ができ，

$$< g, \psi_m >= \int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)\right)\psi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_I \psi_n(x)\psi_m(x)dx = c_m =< f, \psi_m >$$

(iii) より，

$$||f-g|| = \int_I |f(x)-g(x)|^2 dx = 0$$

一様収束先 $g(x)$ は連続なので，$f(x)$ の連続性と合わせて，$f(x) = g(x)$.

なお，区間 I で一様収束する級数が項別積分できるのは以下のように示せる．

$$\left|\sum_{n=1}^{k} c_n \int_I \psi_n(x)\psi_m(x)dx - \int_I g(x)\psi_m(x)dx\right| \leq \int_I \left|\left(\sum_{n=1}^{k} c_n\psi_n(x) - g(x)\right)\psi_m(x)\right| dx$$

右辺は，$2\pi \cdot \max_{x\in I}\left|\sum_{n=1}^{k} c_n\psi_n(x) - g(x)\right| \cdot \max_{x\in I}|\psi_m(x)|$ で押さえられ，一様収束性より，$k\to\infty$ で $\to 0$ となる．

(v) の証明：これは級数の項別微分の一般的結果である（以前の講義参照）.

実は，Fourier 級数展開は，$[-\pi,\pi]$ 上の完全正規化直交系（基底）による展開である．つまり，$[-\pi,\pi]$ 上の２乗可積分関数としての関数列：

$$\{\psi_m\}_{m=1,2,\ldots} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots,\} \qquad (2)$$

は以下の性質を持つ.

１＞ **正規直交性** $< \psi_m, \psi_n >= \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$ ．証明は「練習」.

$2>$ **完全性** $<f,\psi_m>=0 \quad \text{for} \ \forall m=1,2,\ldots \ \Leftrightarrow \ ||f||^2=0$.

証明はオンライン付録.

$3>$ $f(x)$ が**連続で区分的に滑らかな時**, $\sum_{n=1}^{\infty}<f,\psi_n>\psi_n(x)$ は $[-\pi,\pi]$ 上で $f(x)$ へ**一様かつ絶対収束**する．**注**：$f(x)$ の条件より，導関数 $f'(x)$ は $[-\pi,\pi]$ 上で有界.

証明はオンライン付録.

$4>$ $f'(x)$ が連続で区分的に滑らかな時 (当然 $f(x)$ もそうなる)，$\sum_{n=1}^{\infty}<f,\psi_n>\psi_n'(x)$ は $[-\pi,\pi]$ 上で，$f'(x)$ へ一様かつ絶対収束する.

証明は＜３＞と同様.

この＜1, 2, 3＞の性質から，式 (2) の完全正規直交系による $f(x)$ の展開：

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\infty}<f,\psi_l>\psi_l(x) &= \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}dx\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}dx\right)\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}dx\right)\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
a_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\ a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\ b_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx
$$

に対し，上の (iv) より，区分的に滑らかな連続関数の Fourier 級数展開の式が成立：

$$
f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)
$$

つまり，$[-\pi,\pi]$ 上の 2 乗可積分関数に対する正規化展開基底は

$$
\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots,\}
$$

であるが，通常は係数を整理し，フーリエ級数を式 (3) のように書く.

練習

上の関数列 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\cdots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\cdots,\}$ の正規直交性を証明せよ.

オンライン付録

A-1. 内積空間の性質の証明

1. $< f, \mathbf{0} >=< f, 0 \cdot g >= 0 \cdot < f, g >= 0$
2. コーシー＆シュワルツ不等式：

- $f = g = \mathbf{0}$（$||f|| = ||g|| = 0$）の場合は自明.
- $g \neq \mathbf{0}$（$||g|| > 0$）の場合（$f \neq \mathbf{0}$ も同様），実数 t に対し，

$$||f - tg||^2 =< f - tg, f - tg >= ||f||^2 - 2t < f, g > +t^2||g||^2$$

となるが，最左辺は t の値によらず必ず非負である．よって，最右辺を t の２次式と見ると，

$$\text{（判別式）} \quad = 4 < f, g >^2 -4||f||^2||g||^2 \leq 0 \ \Rightarrow \ | < f, g > | \leq ||f|| \cdot ||g||$$

- **別解**：$||f||, ||g|| > 0$ として，$< f, g >> 0$ の場合，$< f, g >= | < f, g > |$ であり，

$$0 \leq ||\frac{f}{||f||} - \frac{g}{||g||}||^2 = \frac{< f, f >}{||f||^2} + \frac{< g, g >}{||g||^2} - \frac{2 < f, g >}{||f|| \cdot ||g||} = 2\left(1 - \frac{< f, g >}{||f|| \cdot ||g||}\right)$$

等号が成り立つのは，$f = \frac{||f||}{||g||}g$ という比例関係が成り立つ場合のみ.

一方，$< f, g >< 0$ の場合，$h = -f$ とおいて，$< h, g >$ に上の計算を適用. $| < f, g > | =< h, g >$ に注意.

3. 三角不等式：
$||f + g||^2 =< f + g, f + g >$

$$= ||f||^2 + 2 < f, g > +||g||^2 \leq ||f||^2 + 2||f||||g|| + ||g||^2 = (||f|| + ||g||)^2$$

ただし，シュワルツの不等式（$| < f, g > | \leq ||f||||g||$）を途中で用いた.

4. 中線定理：
左辺の $||f + g||^2 + ||f - g||^2$ を定義通りに内積で展開して変形すると，右辺の $2(||f||^2 + ||g||^2)$ に変形できる.

5. ピタゴラスの定理：
正規直交系 $g_1, g_2, \ldots, g_n \in H$ に対して，

$$||f - \sum_{k=1}^{n} < f, g_k > g_k||^2 =< f - \sum_{k=1}^{n} < f, g_k > g_k, f - \sum_{k=1}^{n} < f, g_k > g_k >$$

$$= ||f||^2 - 2\sum_{k=1}^{n} < f, g_k >^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} < f, g_j >< f, g_k >< g_j, g_k >$$

$$= ||f||^2 - 2\sum_{k=1}^{n} < f, g_k >^2 + \sum_{k=1}^{n} < f, g_k >^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} < f, g_k >^2$$

6. ベッセル不等式（H が無限次元ベクトル空間の場合）：
無限列の正規直交系 $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots \in H$ がある時，ピタゴラスの定理（$||f - \sum_{k=1}^{n} < f, g_k > g_k||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=1}^{n} < f, g_k >^2$）の左辺は，どんな n に対しても非負なので，

$$\sum_{k=1}^{n} < f, g_k >^2 \leq ||f||^2 < \infty. \quad \text{よって，} \quad \sum_{k=1}^{\infty} < f, g_k >^2 \leq ||f||^2$$

A-2. Fourier 級数展開基底の性質の証明

＜2＞ 完全性の証明.

$$\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \}$$

は $[-\pi, \pi]$ 上の 2 乗可積分関数に対する完全正規化直交系になる．その完全性を以下で示す.

方針は,「ある点の近傍で $f(x) \neq 0$ となること」と「任意の $n = 1, 2, \ldots$ において $f(x)$ と n 番目の基底（三角）関数の積分 $< f, \psi_n >$ が 0 になること」とが矛盾がすることを示す.

簡単のために，$f(x)$ は連続とする（この制約は外せる）.

- 任意の $n = 1, 2, \ldots$ において $< f, \psi_n > = 0$ となること
- ある点の近傍で $f(x) \neq 0$ となること

の 2 つが両立しない（矛盾が生じる）ことを示せばよい.

両方を仮定すると，ある正数 δ があり，ある狭い区間 $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$（$|b-a| < \pi$）で $f(x) \geq \delta > 0$ として一般性を失わない．そこで,

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

という三角関数多項式：$\cos x$ の x-軸を $y = 1 - \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ へ（$(0, 1)$ の範囲の値である点に注意），y-軸を $x = \frac{a+b}{2}$ へ平行移動したもの，を考える.

- $-\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \leq g(x) \leq 2 - \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, $g(a) = g(b) = 1$,
  $g'(x) = -\sin\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$,
- $x \in [a, b] \Rightarrow g(x) \geq 1$, $x \in [-\pi, a], [b, \pi] \Rightarrow |g(x)| \leq 1$ が言える（そうなるように平行移動した）.

さて，任意の自然数 k に対して，$g^k(x)$ も三角関数多項式であり，式 (2) の関数列：$\{\psi_m\}_{m=1,2,\ldots}$ の有限和で書けるので，$< f, g^k >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g^k(x)dx = 0$．ここで積分区間を分けると，任意の自然数 k で，

$$0 = \int_a^b f(x)g^k(x)dx + \int_{-\pi}^{a} f(x)g^k(x)dx + \int_b^{\pi} f(x)g^k(x)dx$$

- 第 2，3 項は，$|g(x)| \leq 1$ より，$k \to \infty$ でも有界
- 第 1 項では，$|g(x)| \geq 1$ であり，さらに，ある $[c,d] \subset [a,b]$ を取れば，ある正数 ε があって，$|g(x)| \geq 1+\varepsilon$ となる．よって，$k \to \infty$ の時

$$\int_a^b f(x)g^k(x)dx \geq \delta \int_a^b g^k(x)dx \geq \delta \int_c^d (1+\varepsilon)^k dx = \delta(d-c)(1+\varepsilon)^k \to \infty$$

これは 3 つの項の和が 0 になることと矛盾する．

注：

完全正規化直交系になるのは上の関数列であるが，通常，フーリエ級数を

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx$$

と書くので，

$$\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots, \}$$

をフーリエ展開基底（またはフーリエ基底）と呼び，

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

を 2 乗可積分関数 $f(x)$ のフーリエ展開係数（またはフーリエ係数）と呼ぶ．

＜3＞ $f(x)$ が**連続で区分的に滑らかな**時に，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ は $[-\pi, \pi]$ で**一様かつ絶対収束すること**の証明：

$$\begin{aligned}
\sum_{n=m+1}^{m+k}(|a_n \cos nx| + |b_n \sin nx|) &= \sum_{n=m+1}^{m+k}\left(n|a_n|\frac{|\cos nx|}{n} + n|b_n|\frac{|\sin nx|}{n}\right) \\
&\leq \left(\sum_{n=m+1}^{m+k}(n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2)\right)^{1/2}\left(\sum_{n=m+1}^{m+k}\left(\frac{\cos^2 nx}{n^2} + \frac{\sin^2 nx}{n^2}\right)\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{n=m+1}^{m+k} n^2(a_n^2 + b_n^2)\right)^{1/2}\left(\sum_{n=m+1}^{m+k}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

の最右辺は x に依らず,「任意の k で，$m \to \infty$ なら $\to 0$」を示せばよい．なお，上の不等号はシュワルツの不等式．

$\dfrac{1}{n^2}$ の和の方は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することから従う．残りは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2)$ が収束することを示せば十分である．

さて，$f(x)$ は $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかなので，$f'(x)$ は $[-\pi,\pi]$ で有界になり，よって二乗可積分である．そこで，＜１＞より，Bessel 不等式：

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{l=1}^{m} < f',\psi_l >^2 \le ||f'||^2$$

が成り立つ（実際は，＜２＞より，Parseval の等式が成り立つ．しかし以下の証明には不等式で十分である）．

また，$< f',\psi_n >$ （すなわち，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx$ や $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx$）は，部分積分によって以下のように f のフーリエ展開係数 a_n, b_n で書ける．

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx$$

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx$$

そこで上の Bessel 不等式の左辺を展開すると，$\psi_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \psi_2(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi}}$, $\psi_3(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\psi_{2m+1}(x)=\dfrac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}$ なので，任意の自然数 m に対して，

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{2m+1} < f',\psi_l >^2 &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)dx\right)^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx\right)^2 \\
&= 0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}(n\pi b_n)^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}(-n\pi a_n)^2 \;=\; \pi\sum_{n=1}^{m} n^2(a_n^2+b_n^2)
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2+b_n^2) \;=\; \frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{\infty} < f',\psi_l >^2 \le \frac{1}{\pi}||f'||^2 < \infty$ が成り立ち，これより，任意の $k>1$ に対し，$\displaystyle\sum_{n=m+1}^{m+k} n^2(a_n^2+b_n^2) \;\to\; 0 \;\; (m\to\infty)$ が従う．

結局，$f(x)$ が $[-\pi,\pi]$ で区分的に滑らかな場合は，$f(x)$ のフーリエ展開係数の絶対値 $|a_n|,|b_n|$ が n に対して急速に減少することが判る．