応用解析学（電子２年）　　第 11 講

- 1 次元熱伝導方程式の初期値境界値問題

前回復習

- 関数列 $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots,\}$ の正規直交性.

$m, n = 1, 2, \ldots$ に対して，$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx$ は奇関数の $[-\pi, \pi]$ 上の積分なので 0．また，直接の計算から，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi \quad (\text{よって} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = 1)$$

あとは，$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$ であるが，同様なので，cos の方のみ示す．復習：$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ より，

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B)),$$

そこで，$m = n$ の場合，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx) dx = \frac{2\pi}{2} + \left[\frac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi + (0 - 0) = \pi$$

一方，$m \neq n$ の場合，$m + n \neq 0$, $m - n \neq 0$．よって，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx$$
$$= \left[\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = (0-0) + (0-0) = 0$$

なお，$m \neq n$ の場合，以下のように証明することもできる．

$$C_{m,n} \overset{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx, \; S_{m,n} \overset{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$$

と置くと，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\cos mx \sin nx) &= n(\cos mx \cos nx) - m(\sin mx \sin nx) \\ \frac{d}{dx}(\cos nx \sin mx) &= m(\cos nx \cos mx) - n(\sin nx \sin mx) \end{aligned}$$

より，$nC_{m,n} - mS_{m,n} = [\cos mx \sin nx]_{-\pi}^{\pi} = 0$．同様に，$mC_{n,m} - nS_{n,m} = 0$．一方，$C_{n,m} = C_{m,n}$, $S_{n,m} = S_{m,n}$ なので，結局，

$$\left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m}\right) C_{m,n} = 0 \quad \text{よって} \quad C_{n,m} = 0$$

また，$nC_{m,n} - mS_{m,n} = 0$ より，$S_{m,n} = 0$.

19．初期値境界値問題の変数分離による解法

１次元熱伝導方程式の初期値境界値問題

(要点)：１次元の熱伝導方程式の**初期値境界値問題**を，**変数分離法**によって，各変数毎の**常微分方程式**に帰着し，**フーリエ級数を利用**して，初期値を満たす（$t=0$ で与えられた初期温度分布と一致する）ような**解を構成**する．

次に**最大値原理**を用いて，**解の一意性**を示す．単に１次元熱伝導方程式（以下の式 (1)）を満す解関数 $u(t,x)$ は無数にあるが，与えられた**境界条件**（式 (2)）と**初期条件**（式 3)）も満す $u(t,x)$ は一意になり，自然現象が確定することがわかる．

x 軸上の $[0,1]$ に置かれた長さ１の細い針金を考え，時刻 t 位置 x での温度を未知関数 $u(t,x)$ とする．針金の両端は常に０度に保たれているとする．時刻０での各位置での温度は関数 $f(x)$ として与えられているとする．
$u(t,x)$ は，$(t,x)\in[0,\infty)\times[0,1]$ で連続で，内部では滑らかで，以下を満す．

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{for} \quad t>0, 0<x<1 \tag{1}$$

$$u(t,0)=u(t,1)=0 \quad \text{for} \quad t\geq 0 \tag{2}$$

$$u(0,x)=f(x) \quad \text{for} \quad 0\leq x\leq 1 \tag{3}$$

さらに，条件として以下を仮定する．

- 初期状態を表す関数 $f(x)$ は $[0,1]$ で連続かつ区分的に滑らか．かつ，$f(x)\not\equiv 0$．また，(2) より，$f(0)=f(1)=0$．

(補足)：しかし，現実の現象では滑らかでない場合も存在する．二十世紀に入ってから「超関数」という概念の導入によって，滑らかでない初期関数にも厳密な解析ができるようになった．

この未知関数 $u(t,x)$ を「変数分離法」によって解を求めてみよう．まず，

$$u(t,x)=T(t)X(x),\ T(t)\not\equiv 0, X(x)\not\equiv 0$$

のような形（変数分離形）で，(1) & (2) を満す解があると仮定する．(1) より，

$$T'(t)X(x)=T(t)X''(x)\ (0<t, 0<x<1)$$

となり，特に，$T(t)\neq 0, X(x)\neq 0$ なる (t,x) では，$\dfrac{T'(t)}{T(t)}=\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ が成り立つが，この左辺は x に依らず，右辺は t に依らないので，結局，ある定数でなければならない．その定数を $-\lambda$ と置くと，

$$\frac{T'(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

より，T, X は以下の「**（常）微分方程式**」を満す.

$$\begin{aligned} T'(t)+\lambda T(t) &= 0 \quad (0<t) \qquad (4)\\ X''(x)+\lambda X(x) &= 0 \quad (0<x<1), \qquad X(0)=X(1)=0 \qquad (5)\end{aligned}$$

- (5) は，その**境界条件**に由来して，λ が限られた値の場合のみ解を持つ.

  まず，$\lambda \geq 0$ が必要．なぜなら，

  $$\begin{aligned} -\lambda\int_0^1 X^2(x)dx &= \int_0^1 X''(x)X(x)dx = [X'(x)X(x)]_0^1 - \int_0^1 (X'(x))^2\,dx \\ &= -\int_0^1 (X'(x))^2\,dx \leq 0 \end{aligned}$$

  ここで，$\lambda=0$ の場合は，$X''(x)\equiv 0$ で，境界条件より，$X(x)\equiv 0$ となり，題意に反する.

そこで，$\lambda>0$ の場合を考えればよい．この時，$X''(x)+\lambda X(x)=0$ の**一般解**（※）は，任意定数 $c_1(\neq 0)$, c_2 を含む

$$X_\lambda(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x$$

であり，これが境界条件 $X_\lambda(0)=X_\lambda(1)=0$ を満すためには，$c_2=0, c_1\sin\sqrt{\lambda}=0$.
よって，$\sqrt{\lambda}=$「π の整数倍」．つまり，

$$\lambda=(n\pi)^2 \quad (n=1,2,\ldots) \qquad (6)$$

の場合にのみ，(5) が解を持ち得て，各 $n=1,2,\ldots$ に対して

$$X_\lambda(x)=X_{(n\pi)^2}(x)=c_1\sin n\pi x$$

が一般解になる．この λ を微分方程式 (5) の「**固有値**」と呼ぶ.

- (6) の各々の $\lambda=(n\pi)^2$ に対する (4) の**一般解**（※）は任意定数 c_3 を含み,

  $$T'(t)+(n\pi)^2T(t)=0 \quad \text{より，} \quad T_\lambda(t)=T_{(n\pi)^2}(t)=c_3e^{-(n\pi)^2t}$$

- よって，各 $n=1,2,\ldots$ に対して $Ae^{-(n\pi)^2t}\sin n\pi x \quad (0\leq t, 0\leq x\leq 1)$ は，(1) & (2) の解である．ただし一般には (3) を満たさない．もちろん，特別な形の $f(x)$ に対しては，(3) を満すようにできる（例：$f(x)=\sin\pi x$ の場合は，$n=1, A=1$）.

- **斉次微分方程式の解の重合わせ原理**（※）より，任意の自然数 m に対して,

  $$u(t,x)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{m}A_ne^{-(n\pi)^2t}\sin n\pi x \quad (0\leq t, 0\leq x\leq 1)$$

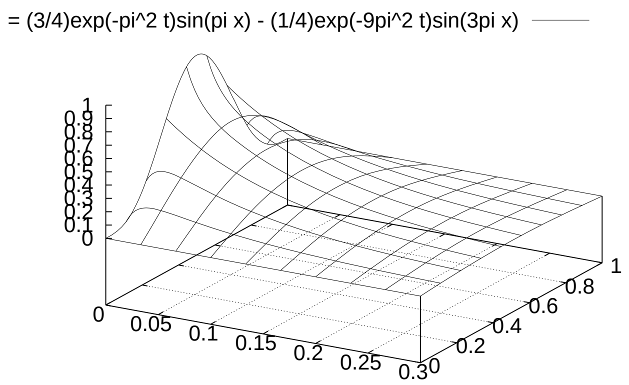
  も，(1) & (2) の解になる（$A_1, A_2, \ldots$ は任意）が，一般には (3) を満たさない.

※　:「常微分方程式」を未履修の人はとりあえず鵜呑みにして下さい.

ところが，実は，$f(x)$ に合わせて，$A_1, A_2, \ldots$ を適切に選ぶと，

$$u^*(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} A_n e^{-(n\pi)^2 t}\sin n\pi x \tag{7}$$

は，$0 \leq t, -\infty < x < \infty$ に対して定義可能で（右辺が収束して），(1) & (2) & (3) の解になる.



例：初期値 $f(x) = u(0,x) = \sin^3 \pi x$ の場合，$u^*(t,x)$ は有限個の項の和で書けるので，その具体的な形を調べてみよう．$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ より，

$$u(0,x) = \sin^3 \pi x = \frac{3}{4}\sin \pi x - \frac{1}{4}\sin 3\pi x$$

よって，$A_1 = 3/4,\ A_3 = -1/4,\ A_2 = A_4 = A_5 = \cdots = 0$ と選ぶと，

$$u^*(t,x) \ = \ \frac{3}{4}e^{-\pi^2 t}\sin \pi x - \frac{1}{4}e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x$$

この式は, t を止め, x の関数（$[0,1]$ 上の温度分布）として見ると, $\alpha \sin \pi x - \beta \sin 3\pi x$ の形をしており，時刻 t が進むにつれて，α と β は，値が減少しつつ比が変化するため，元の $\sin^3 \pi x$ が縮小するだけでなく形が崩れてくる．ただし，どの時刻 t においても，温度分布は中心 $x = \dfrac{1}{2}$ を峰とする左右対称の単峰形である．これは,

$$\frac{\partial u^*}{\partial x}(t,x) = \frac{3\pi}{4}\left(e^{-\pi^2 t}\cos \pi x - e^{-9\pi^2 t}\cos 3\pi x\right) \quad (0 < t,\ 0 < x < 1)$$

を調べ増減表を書けばよい.

一方，どの点 x においても，時刻 t が進むにつれて温度が単調に減少するわけでは「ない」．これは，

$$\frac{\partial u^*}{\partial t}(t,x) = \frac{3\pi^2}{4}\left(-e^{-\pi^2 t}\sin\pi x + 3e^{-9\pi^2 t}\sin 3\pi x\right) \quad (0 < t,\ 0 < x < 1)$$

を調べ増減表を書けばよい．下図からも判るように，中心 $x = \dfrac{1}{2}$ 付近では時刻と共に単調減少するが，端 $x = 0, 1$ 付近では一旦上昇し，最終的に減少する．

式 (7) が式 (1) & (2) & (3) の解になることの証明

まず，**初期条件** (3) を満すように，$A_1, A_2, \ldots$ を決めるために，$f(x)$ を Fourier 級数展開したい．$0 \le x \le 1$ で定義され，$f(0) = f(1) = 0$（式 (2) より）なので，

$$f(-x) = -f(x), \quad f(x+2) = f(x)$$

のようにして，$-\infty < x < \infty$ の「奇関数」拡張して，連続かつ区分的に滑らかな，周期 2 の周期関数と見なせる．

- Fourier 級数展開すると，$f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1} f(y)\sin n\pi y dy\right)\sin n\pi x$ となり，右辺は，絶対収束かつ一様収束 (x に関して）する．
- 一方，定義 (7) の右辺が少なくとも $(0, x)$ で収束するならば，定義より

  $$u^*(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$$

  なので，

  $$A_n \overset{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\sin n\pi x dx$$

  と置けば，(7) の右辺は，少なくとも $t = 0$ では絶対収束かつ一様収束 (x に関して）し，

  $$u^*(0,x) = f(x)$$

  となる．つまり，(3) を満す．

そこで，証明すべきことは，上の A_n を用いて定義した (7) において，

(i) 右辺の**級数**が，$0 \le t, -\infty < x < \infty$ で一様収束する．

(ii) 右辺を形式的に項別微分した**級数**が，任意の $t_0 > 0$ に対して，$t_0 \le t, -\infty < x < \infty$ で一様収束する．

- **(i) が言えれば**，定義 (7) の $u^*(t,x)$ は，$0 \le t, -\infty < x < \infty$ で連続で，$u^*(0,x) = f(x)$ となるので，(3) が満され，また，$u^*(t,0) = u^*(t,1) = 0$ も明らかで，(2) が満される．

- さらに，(ii) **が言えれば**，級数の項別微分ができ，

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^*}{\partial t}(t,x) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} -(n\pi)^2 A_n e^{-(n\pi)^2 t}\sin n\pi x,\\ \frac{\partial u^*}{\partial x}(t,x) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} n\pi A_n e^{-(n\pi)^2 t}\cos n\pi x,\\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}(t,x) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} -(n\pi)^2 A_n e^{-(n\pi)^2 t}\sin n\pi x \end{aligned} \tag{8}$$

  が $0<t, -\infty<x<\infty$ で成り立ち，$u^*(t,x)$ が (1) を満す.

(i) の証明：

示すべきことは (7) の右辺の一様収束性であり，

- $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$ は一様かつ絶対収束すること（フーリエ級数），
- $t\geq 0$ および $n=1,2,\ldots$ において，$0\leq e^{-(n\pi)^2 t}\leq 1$ の不等式，

から言える．ここで $t=0$ を含むので，$e^{-(n\pi)^2 t}\leq 1$ までしか言えない.

以下で厳密に証明する：

$$Q_{n_0,m}(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=n_0}^{n_0+m} A_n e^{-(n\pi)^2 t}\sin n\pi x$$

として，どんな $\varepsilon>0$ に対しても十分大きな n_0 を取れば，

$$|Q_{n_0,m}(t,x)| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad m=0,1,\ldots; 0\leq t, -\infty<x<\infty$$

となればよい．ここで，$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$ が一様かつ絶対収束することから，

$$\begin{aligned}|Q_{n_0,m}(t,x)| &\leq \sum_{n=n_0}^{n_0+m} |A_n e^{-(n\pi)^2 t}\sin n\pi x| \leq \sum_{n=n_0}^{n_0+m} |A_n \sin n\pi x|\\ &\leq \varepsilon \quad \text{for} \quad m=0,1,\ldots; 0\leq t, -\infty<x<\infty\end{aligned}$$

(ii) の証明：

示すべきことは (8) の右辺の一様収束性であり，

- A_n が n によらない上限を持つこと．$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$ が一様かつ絶対収束することから，実際はもっと強く，A_n が n の増加に対して減少することが言える（減少の速さは $f(x)$ の滑らかさに依存）．しかし，次項のおかげで，ここではそれを使わないでも済む.
- $t>t_0>0$ で考えるならば，$e^{-(n\pi)^2 t}$ は，n の増加に対して急減少すること，

から，項別微分する際に出てくる n, n^2 を打ち消して一様収束することが言える.
注：上の (i) との違いは，$t=0$ では収束しなくてもよい点．よって，$e^{-(n\pi)^2 t}$ の急減少が利用でき，n, n^2 の増加に負けない．詳細はオンライン付録参照.

１次元熱伝導方程式の初期値境界値問題の解の一意性（最大値原理による）

１次元の熱伝導方程式の初期値境界値問題を，変数分離法によって，各変数毎の常微分方程式に帰着し，フーリエ級数を利用して，初期値を満たす（$t=0$ で与えられた初期温度分布と一致する）ような解 (7) を構成した．

以下では，**最大値原理を用いて，この問題の解の一意性**を示す．単に１次元熱伝導方程式（式 (1)）を満す解関数 $u(t,x)$ は無数にあるが，与えられた境界条件（式 (2)）と初期条件（式 3)）も満す $u(t,x)$ は一意になり，自然現象が確定することがわかる．逆に，もし解が一意でなければ，それは (1), (2), (3) がその現象のモデル化として適当でなかったことを意味する．

証明：

(1), (2), (3) を満す**異なる解** $u_1(t,x)$ **と** $u_2(t,x)$ **があると仮定する**と，

$$w(t,x) \overset{\text{def}}{=} e^{-t}(u_1(t,x)-u_2(t,x))$$

は，$(t,x)\in[0,\infty)\times[0,1]$ で連続で，その内部では滑らかで，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= -e^{-t}(u_1(t,x)-u_2(t,x)) + e^{-t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t,x)\right), \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= e^{-t}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(t,x)\right) = e^{-t}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t,x)\right)
\end{aligned}$$

より，結局以下を満す．

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) - w(t,x) \quad \text{for} \quad t>0, 0<x<1 \tag{9}$$

$$w(t,0)=w(t,1)=0 \quad \text{for} \quad t\ge 0 \tag{10}$$

$$w(0,x)=0 \quad \text{for} \quad 0\le x\le 1 \tag{11}$$

そこで，逆に，(9), (10), (11) を満す解として $w(t,x)\equiv 0$ しかないことを示せばよい．そのために，任意の $T>0$ を取って，$(t,x)\in[0,T]\times[0,1]$ の矩形領域 R_T を考える．$w(t,x)$ **は連続なので，**R_T **上の最大値と最小値を持つ**．

- $w(t,x)$ が R_T 上の (t_0,x_0) で正の最大値を取ると**仮定**すると，$w(t_0,x_0)>0$ で，式 (10，11) より，$t_0\ne 0, x_0\ne 0, x_0\ne 1$.
  - (t_0,x_0) が R_T の内部の場合：$\dfrac{\partial w}{\partial t}(t_0,x_0)=0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t_0,x_0)\le 0$
  - $(t_0,x_0)\in T\times(0,1)$ の場合：$\dfrac{\partial w}{\partial t}(t_0,x_0)\ge 0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t_0,x_0)\le 0$

  いずれにせよ，式 (9) と矛盾．
- $w(t,x)$ が R_T 上の (t_0,x_0) で負の最小値を取ると**仮定**すると，$w(t_0,x_0)<0$ で，式 (10，11) より，$t_0\ne 0, x_0\ne 0, x_0\ne 1$.

– (t_0, x_0) が R_T の内部の場合： $\dfrac{\partial w}{\partial t}(t_0, x_0) = 0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t_0, x_0) \geq 0$

– $(t_0, x_0) \in T \times (0, 1)$ の場合： $\dfrac{\partial w}{\partial t}(t_0, x_0) \leq 0, \quad \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t_0, x_0) \geq 0$

いずれにせよ，式 (9) と矛盾.

- よって，R_T 上では,「 $\max\limits_{(t,x)\in R_T} w(t,x) \leq 0$ かつ $\min\limits_{(t,x)\in R_T} w(t,x) \geq 0$ 」となり，$w(t,x) = 0 \, \forall (t,x) \in R_T$．$T > 0$ は任意なので，結局，$w(t,x) \equiv 0$.

参考：

最大値原理を応用すると，初期関数 $f(x)$ に対する (1), (2), (3) を満す解 $u(t,x)$ の以下のような意味の「連続性」も言える：初期関数 $f_1(x)$ に対する解を $u_1(t,x)$, 初期関数 $f_2(x)$ に対する解を $u_2(t,x)$，とする時，任意の $0 \leq t$ において，

$$\max_{0\leq x\leq 1} |u_1(t,x) - u_2(t,x)| \leq \max_{0\leq x\leq 1} |f_1(x) - f_2(x)|$$

が成り立つ.

すなわち，(1), (2), (3) を満す解 $u(t,x)$ は，一意（毎回同じ）かつ初期値 $f(x)$ が多少変わった時に解 $u(t,x)$ は大きく変化しないという意味で，安定な自然現象としての性質を満たしている．また自然現象の数学解析による近似という観点でも，初期関数として現実の初期値を近似するものを与えても，真の現象を近似する解が得られることになる．このような性質を持つ問題「(1), (2), (3)」を「適切 (well-posed)」と呼ぶ.

オンライン付録

A-1．一次元熱伝導方程式の初期値境界値問題の級数解の収束

式 (7) の級数の収束を証明する際に，初期関数 $f(x)$ がフーリエ級数できるので，$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$ が一様かつ絶対収束することを利用した．しかし,「一様収束性」だけから証明することができる．参考までにそれを示す．

そのために,

$$P_{n_0,m}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=n_0}^{n_0+m} A_n \sin n\pi x$$

と置くと，$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$ が $-\infty < x < \infty$ で「一様収束」することから，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても十分大きな n_0 を取れば,

$$|P_{n_0,m}(x)| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad m = 0, 1, \ldots; -\infty < x < \infty$$

よって，そのような n_0 に対し，$Q_{n_0,m}(t,x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=n_0}^{n_0+m} A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$ として,

$$\begin{aligned}
Q_{n_0,m}(t,x) &= e^{-(n_0\pi)^2 t} P_{n_0,0}(x) + e^{-((n_0+1)\pi)^2 t}(P_{n_0,1}(x) - P_{n_0,0}(x)) + \ldots \\
&+ e^{-((n_0+m)\pi)^2 t}(P_{n_0,m}(x) - P_{n_0,m-1}(x)) \\
&= \left(e^{-(n_0\pi)^2 t} - e^{-((n_0+1)\pi)^2 t}\right) P_{n_0,0}(x) + \ldots \\
&+ \left(e^{-((n_0+m-1)\pi)^2 t} - e^{-((n_0+m)\pi)^2 t}\right) P_{n_0,m-1}(x) + e^{-((n_0+m)\pi)^2 t} P_{n_0,m}(x) \\
|Q_{n_0,m}(t,x)| &\leq \left(e^{-(n_0\pi)^2 t} - e^{-((n_0+1)\pi)^2 t}\right)\varepsilon + \ldots + \left(e^{-((n_0+m-1)\pi)^2 t} - e^{-((n_0+m)\pi)^2 t}\right)\varepsilon \\
&+ e^{-((n_0+m)\pi)^2 t}\varepsilon \\
&= e^{-(n_0\pi)^2 t}\varepsilon \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad m = 0, 1, \ldots; 0 \leq t, -\infty < x < \infty
\end{aligned}$$

A-2．一次元熱伝導方程式の初期値境界値問題の級数解の項別微分

式 (7) の級数の項別微分ができることを示す．すなわち,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^*}{\partial t}(t,x) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} -(n\pi)^2 A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x, \\
\frac{\partial u^*}{\partial x}(t,x) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} n\pi A_n e^{-(n\pi)^2 t} \cos n\pi x, \\
\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}(t,x) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} -(n\pi)^2 A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x
\end{aligned} \qquad (12)$$

が $0 < t, -\infty < x < \infty$ で成り立つ．

式 (12) の右辺のどれでも１つを $\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t,x)$ と置いた時,

$$Q_{n_0,m}(t,x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=n_0}^{n_0+m} q_n(t,x)$$

として，任意の $0 < t_0$ を固定した時に，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても十分大きな n_0 を取れば,

$$|Q_{n_0,m}(t,x)| \leq \varepsilon \quad \text{for} \quad m = 0,1,\ldots; t_0 \leq t, -\infty < x < \infty$$

となればよい.

例えば，$\sum_{n=1}^{\infty} -(n\pi)^2 A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$，の一様収束性を示したい場合,

$$q_n(t,x) \overset{\text{def}}{=} -(n\pi)^2 A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x$$

- Fourier 係数 A_n は，ある正数 K があって，$|A_n| \leq K$ である（そうでなければ， $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$ が $-\infty < x < \infty$ で絶対かつ一様収束することと矛盾するから）,
- $t_0 \leq t$ に対して： $e^{-(n\pi)^2 t} \leq e^{-(n\pi)^2 t_0}$,
- $|\sin n\pi x| \leq 1$，より

$$|q_n(t,x)| \leq K(n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2 t_0} \quad (t_0 \leq t,\ -\infty < x < \infty)$$

さらに，$C \overset{\text{def}}{=} e^{\pi^2 t_0} > 1$ と置けば，指数関数はべき乗関数より急増するので,

$$\sum_{n=1}^{\infty} K(n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2 t_0} = K\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 C^{-n^2} \leq K\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 C^{-n} < \infty$$

となり，よって,

$$\sum_{n=n_0}^{n_0+m} K(n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2 t_0} \leq \varepsilon$$

以上から，任意の $t_0(> 0)$ を固定した時，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても十分大きな $n_0(\geq N)$ を取れば，$m = 0,1,\ldots; t_0 \leq t, -\infty < x < \infty$ に対して,

$$|Q_{n_0,m}(t,x)| \leq \sum_{n=n_0}^{n_0+m} |q_n(t,x)| \leq \sum_{n=n_0}^{n_0+m} K(n\pi)^2 e^{-(n\pi)^2 t_0} \leq \varepsilon$$

A-3. 初期値境界値問題における Green 関数

初期値境界値問題 (1) & (2) & (3) の解 (7) は，以下のように書き直おすことができる．

$$
\begin{aligned}
u^*(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} f(y) \sin n\pi y dy \right) e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x \\
&= \int_{-1}^{1} G(x,y,t) f(y) dy \\
G(x,y,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi)^2 t} \sin n\pi x \sin n\pi y
\end{aligned} \tag{13}
$$

この $G(x,y,t)$ を初期値境界値問題 (1) & (2) & (3) の Green 関数と呼ぶ．一般に上の積分を初期値関数 $f(x)$ から解関数 $u^*(t,x)$ への変換と考える時，その変換を「積分作用素」と呼び，$G(x,y,t)$ を積分核と呼ぶ.