応用解析学（電子２年）　　第 12 講

- 1 次元波動方程式の初期値境界値問題
- 2 次元円環領域でのラプラス方程式の境界値問題
- 次回は中間レポート解答用紙と赤鉛筆持参（前半模擬テストの解説を行う）．合わせて後半模擬テストの解説も行う．期末テストは 6 月 4 日予定.

20.初期値境界値問題の変数分離による解法（２）

１次元波動方程式の初期値境界値問題

（**要点**）：１次元の波動方程式の初期値境界値問題を，変数分離法によって，各変数毎の常微分方程式に帰着し，フーリエ級数を利用して，初期値を満たす（$t=0$ で与えられた初期波形および初期波形変化速度と一致する）ような解を構成する．次にエネルギー保存原理を用いて，解の一意性を示す.

x 軸上の $[0,1]$ に置かれた長さ 1 の細い弦の垂直方向の振動を考える．時刻 t 位置 x での垂直方向のずれ（変位）を未知関数 $u(t,x)$ とする．弦の両端は固定されている．ただし，重力の影響は考えない．時刻 0 での各位置での弦の変位及び変位の変化速度は関数 $f(x)$ と $g(x)$ して与えられているとする.
$u(t,x)$ は，$(t,x) \in [0,\infty) \times [0,1]$ で連続で，内部では滑らかで，以下を満す.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{for} \quad t>0, 0<x<1 \tag{1}$$
$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \text{for} \quad t \geq 0 \tag{2}$$
$$u(0,x) = f(x),\ \lim_{t\to+0} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = g(x) \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{3}$$

(2) より，$f(0)=f(1)=g(0)=g(1)=0$．さらに，条件として以下を仮定する.

- $f(x)$ は $[0,1]$ で連続かつ $(0,1)$ で 4 回連続微分可能，$f(x) \not\equiv 0$.

  さらに，$f(x)$ を $[-1,1]$ に拡張し，周期 2 の「奇関数」で連続かつ区分的に滑らかな関数と見なした時，$f''(0)=f''(1)=0$（簡単のために）.
- $g(x)$ は $[0,1]$ で連続かつ $(0,1)$ で 3 回連続微分可能.

この１次元波動方程式の初期値境界値問題を「変数分離法」によって解く：

$$u(t,x) = T(t)X(x),\ T(t) \not\equiv 0, X(x) \not\equiv 0$$

のような形（変数分離形）で，(1) & (2) を満す解があると仮定する．(1) より，

$$T''(t)X(x) = T(t)X''(x)\ (0<t, 0<x<1)$$

となり，特に，$T(t) \neq 0, X(x) \neq 0$ なる (t, x) では， $\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$ が成り立つが，この左辺は x に依らず，右辺は t に依らないので，結局，ある定数でなければならない．その定数を $-\lambda$ と置くと，

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

より，T, X は以下の（常）微分方程式を満す.

$$\begin{aligned} T''(t) + \lambda T(t) &= 0 \quad (0 < t) & (4) \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0 \quad (0 < x < 1), \qquad X(0) = X(1) = 0 & (5) \end{aligned}$$

- (5) は熱方程式の場合と同様，**境界条件**より，λ が限られた正の値（固有値）:

  $$\lambda = (n\pi)^2 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

  の場合にのみ，(5) が解を持ち得て，各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して

  $$X_\lambda(x) = X_{(n\pi)^2}(x) = C \sin n\pi x$$

  が一般解になる（C は任意定数）
- 一方，(6) の $\lambda = (n\pi)^2$ に対する (4) の一般解は，A, B を任意定数として，

  $$T''(t) + (n\pi)^2 T(t) = 0 \quad \text{より，} \quad T_\lambda(t) = T_{(n\pi)^2}(t) = A \cos n\pi t + B \sin n\pi t$$
- よって，各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して

  $$(A \cos n\pi t + B \sin n\pi t) \sin n\pi x \quad (0 \leq t, 0 \leq x \leq 1)$$

  は，(1) & (2) の解である．ただし一般には (3) を満たさない．もちろん，特別な形の $f(x), g(x)$ に対しては，(3) を満すようにできる．例えば，$f(x) = \sin \pi x$, $g(x) \equiv 0$ の場合は，$n = 1, A = 1, B = 0$.
- **斉次微分方程式の重合わせ原理**より，$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ を任意定数，m を任意の自然数として下式も (1) & (2) を満たすが，一般には (3) を満たさない.

  $$u(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{m} (A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t) \sin n\pi x \quad (0 \leq t, 0 \leq x \leq 1)$$

ところが，実は，$f(x), g(x)$ に合わせて，$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ を適切に選ぶと，

$$u^*(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} (A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t) \sin n\pi x \tag{7}$$

は，$0 \leq t, -\infty < x < \infty$ に対して定義可能で（右辺が収束して），(1) & (2) & (3) の解になる.

証明

まず，**初期条件** (3) を満す $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ を求めるために，熱方程式の場合と同様に，$f(x), g(x)$ を $[-1,1]$ に拡張し，周期 2 の「奇関数」と見なして，

- $f(x), g(x)$ を Fourier 級数展開すると，絶対かつ一様収束 (x に関して) する．

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} f(y) \sin n\pi y dy \right) \sin n\pi x, \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-1}^{1} g(y) \sin n\pi y dy \right) \sin n\pi x \end{aligned}$$

- 一方，(7) の右辺の級数が $(0,x)$ で収束するならば，定義より，$u^*(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x$ なので，必要条件として，

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x dx = 2 \int_{0}^{1} f(x) \sin n\pi x dx \tag{8}$$

  と置けば，(7) の右辺の**級数**は，少なくとも $t = 0$ では絶対収束かつ一様収束 (x に関して) し，$u^*(0,x) = f(x)$ となる．

- さらに，定義 (7) の右辺を t に関して形式的に項別微分した**級数**も，任意の x 毎に，$t = 0$ の近傍で一様収束すると仮定すれば，$t \to +0$ の時，

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi A_n \sin n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t) \sin n\pi x \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \sin n\pi x \tag{9}$$

  なので，必要条件として，

$$B_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n\pi} \int_{-1}^{1} g(x) \sin n\pi x dx = \frac{2}{n\pi} \int_{0}^{1} g(x) \sin n\pi x dx \tag{10}$$

  と置けば，(7) の右辺を t で項別微分した級数は，少なくとも $t = 0$ では絶対収束かつ一様収束 (x に関して) し，$\lim_{t \to +0} \frac{\partial u^*}{\partial t}(t,x) = g(x)$ となる．

そこで，上の (8), (10) の A_n, B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を用いて定義した (7) において，

(i) 右辺の級数が，$0 \le t, -\infty < x < \infty$ で一様収束する．

(ii) 右辺を形式的に項別微分した級数が，$0 \le t, -\infty < x < \infty$ で一様収束する．

の 2 つを証明すればよい（→証明はオンライン付録）．なぜなら，

- (i) が言えれば，(7) の $u^*(t,x)$ は，$0 \le t, -\infty < x < \infty$ で連続で，$u^*(t,0) = u^*(t,1) = 0$ も明らかで，(2) 及び (3) の前半が満される．

- さらに，(ii) が言えれば，級数の項別微分ができ，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^*}{\partial t}(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-n\pi A_n\sin n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t)\sin n\pi x \\
\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}(t,x) &= -\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2(B_n\sin n\pi t + A_n\cos n\pi t)\sin n\pi x \\
\frac{\partial u^*}{\partial x}(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}n\pi(A_n\cos n\pi t + B_n\sin n\pi t)\cos n\pi x \\
\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}(t,x) &= -\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2(B_n\sin n\pi t + A_n\cos n\pi t)\sin n\pi x \qquad (11)
\end{aligned}$$

が $0<t, -\infty<x<\infty$ で成り立ち，$u^*(t,x)$ が (1) を満し，かつ，式 (9) より，$\dfrac{\partial u^*}{\partial t}(t,x)$ の右辺は $t=0$ で連続なので式 (3) の後半も満す．

１次元波動方程式の初期値境界値問題のエネルギー保存則

(1), (2), (3) を満す関数 $u(t,x)$ に対し，時刻 t でのエネルギー $E(t)$ を以下で定義する．

$$E(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_0^1\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right\}dx$$

この時，$E(t)$ は $t\,(0\le t<\infty)$ によらず一定であることが導かれる．これを一般に「**波動方程式の解のエネルギー保存則**」と呼ぶ．つまり，

- $E(t)=E(0)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\left\{g^2(x)+(f'(x))^2\right\}dx\,.$

証明：

２つの実数 $0<a<b<1$ に対して，

$$E_{a,b}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_a^b\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right\}dx$$

と置くと，$u(t,x)$ は，$(t,x)\in[0,\infty)\times[0,1]$ で連続で，その内部では滑らか，としているので，任意の $t\in(0,\infty)$ の近傍で，微分と積分の順序交換ができて，

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{a,b}(t) &= \frac{1}{2}\int_a^b\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\right\}dx \\
&= \int_a^b\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)+\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x)\right)dx \\
&= \int_a^b\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right)dx = \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_a^b
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial u}{\partial t}(t,b)\frac{\partial u}{\partial x}(t,b) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,a)\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) \\
&\to \frac{\partial u}{\partial t}(t,1)\frac{\partial u}{\partial x}(t,1) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0 \quad (a \to +0,\ b \to 1-0)
\end{aligned}
$$

２行目から３行目は，式 (1) による．また最後の部分は，式 (2) より，

$$
\frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0 \quad (t > 0),
$$

を用いた．例えば，$a = 1/n, b = 1-1/n$ と置けば，$n \to \infty$ の時，任意の $t \in (0,\infty)$ の近傍で一様収束なので，微分と極限の順序交換が成立し，

$$
\frac{d}{dt}E(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}E_{1/n,1-1/n}(t) = 0, \qquad \text{よって } E(t) = \text{定数} \quad \forall t \in (0,\infty)
$$

さらに，$E(t)$ は，$t = 0$ でも（右）連続なので，$E(t) = E(0)$.

１次元波動方程式の初期値境界値問題の解の一意性

エネルギー保存則を用いて，元の波動方程式の初期値境界値問題の解の一意性を示そう．(1), (2), (3) を満す異なる解 $u_1(t,x), u_2(t,x)$ があったと仮定すると，

$$
w(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)
$$

は，$(t,x) \in [0,\infty) \times [0,1]$ で連続で，その内部では滑らかで，以下を満す．すなわち，(3) で，$f(x) = g(x) \equiv 0$ の場合である．

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) \quad \text{for} \quad t > 0, 0 < x < 1 \tag{12}
$$

$$
w(t,0) = w(t,1) = 0 \quad \text{for} \quad t \geq 0 \tag{13}
$$

$$
w(0,x) = 0, \lim_{t\to+0}\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{14}
$$

この w のエネルギーは，$E(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \{0+0\}\,dx = 0$ より，

$$
E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}(t,x)\right)^2 \right\} dx = 0
$$

よって，$\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}(t,x)\right)^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}(t,x)\right)^2 = 0$ が $(t,x) \in (0,\infty) \times (0,1)$ で成り立ち，つまり，$w(t,x)$ は $[0,\infty) \times [0,1]$ で一定になり，$w(t,x) = w(0,x) \equiv 0$ が言える．

21. ２次元空間での初期値境界値問題

2 次元極座標でのラプラシアン

以降，平面や空間上の偏微分方程式を考えるが，その準備として，2 次元極座標でのラプラシアンを定義する（→計算はオンライン付録）.

平面座標上の原点 $(0,0)$ 以外で定義された関数 $u(x,y)$ がラプラス方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$$

を満す時，極座標：$0\le\theta\le 2\pi$, $0<r$, $\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta, \end{cases}$ 上で定義される関数 $w(r,\theta)\overset{\text{def}}{=}u(x(r,\theta),y(r,\theta))$ は，以下の偏微分方程式を満す.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}(r,\theta)=0 \tag{15}$$

復習（２変数合成関数の微分）：
媒介変数の場合，$u(x,y), x=g_1(t), y=g_2(t)$, がある時,

$$\frac{d}{dt}u(g_1(t),g_2(t)) \;=\; \frac{\partial u}{\partial x}(g_1(t),g_2(t))\frac{dg_1}{dt}(t)+\frac{\partial u}{\partial y}(g_1(t),g_2(t))\frac{dg_2}{dt}(t)$$

座標変換の場合，$(x,y)\Leftrightarrow(p,q)$ の座標変換を $\begin{cases} x &= g_1(p,q) \\ y &= g_2(p,q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p &= f_1(x,y) \\ q &= f_2(x,y) \end{cases}$

$$w(p,q)=u(g_1(p,q),g_2(p,q)) \;\Leftrightarrow\; u(x,y)=w(f_1(x,y),f_2(x,y))$$

と置くと，任意の点 (x,y) において,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \;=\; \frac{\partial w}{\partial p}(f_1(x,y),f_2(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial w}{\partial q}(f_1(x,y),f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

注：1 変数の場合は，$y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ の関係の時，$\dfrac{df}{dx}(x)=\left(\dfrac{dg}{dy}(f(x))\right)^{-1}$，
簡単に書くと，$\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}$，である.

しかし，2 変数の場合は，$(r,\theta)=(f_1(x,y),f_2(x,y))\Leftrightarrow(x,y)=(g_1(r,\theta),g_2(r,\theta))$ の関係の時，$\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\neq\left(\dfrac{\partial g_1}{\partial r}(f_1(x,y),f_2(x,y))\right)^{-1}$ である．これは偏微分するときに「停める」変数が異なるからである．上の例でいえば,

$$\frac{\partial r}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r(x,y)}=\cos\theta(x,y),\quad \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta$$

なので，もちろん逆数の関係にはない．すなわち，$\dfrac{\partial r}{\partial x}\neq\left(\dfrac{\partial x}{\partial r}\right)^{-1}$.

２次元のラプラス方程式の境界値問題

（**要点**）：２次元の円環領域でのラプラス方程式の境界値問題を，極座標を使った表現に直してから，変数分離法で解く．最も単純な場合のラプラス方程式の境界値問題であり，この場合は求積可能な単純な常微分方程式が導かれる．

> 実定数 $a, b, p, q\,(0 < a < b)$ に対して，２次元の円環領域 $a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ 上で連続かつ内部で滑らかな関数 $u(x, y)$ で，
>
> $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(x,y) = \begin{cases} p & \{(x,y) | a^2 = x^2 + y^2\} \\ q & \{(x,y) | b^2 = x^2 + y^2\} \end{cases}$$
>
> を満すものを求める．

これは，半径 a の内側の輪を高さ p の位置に，半径 b の外側の輪を高さ q の位置に置き，２つの輪の間（隙間）に石鹸液で膜を張った時の，膜の形状に対応すると考えられる．ただし重力の影響のない，張力だけによる釣り合いを考える．

２次元極座標：$0 \le \theta \le 2\pi,\ a \le r \le b,\ \begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta, \end{cases}$ を考え，その座標系でのラプラシアン（前述）を使うと，$w(r,\theta) \overset{\text{def}}{=} u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ として，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

結局，以下の「２変数（平面）ラプラス方程式の境界値問題」を解けばよい．

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}(r,\theta) = 0 \quad \text{for} \quad a < r < b, 0 \le \theta \le 2\pi \tag{16}$$

$$w(a,\theta) = p, \quad w(b,\theta) = q \quad \text{for} \quad 0 \le \theta \le 2\pi \tag{17}$$

$$w(r,0) = w(r,2\pi) \quad \text{for} \quad a \le r \le b \tag{18}$$

これまでと同様に,「変数分離法」によってこの解を求めてみよう．つまり，

$$w(r,\theta) = R(r)H(\theta),\ R(r) \not\equiv 0, H(\theta) \not\equiv 0$$

のような形で，(16) & (17) & (18) を満す解があると仮定する．まず，(17) より，

$$H(\theta) = \frac{p}{R(a)} = \frac{q}{R(b)}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

であり，定数になる．よって，元から，$w(r,\theta) = R(r),\ R(r) \not\equiv 0$ の形の解だけを考えればよい．この時，(18) も自動的に満される．これらは，領域も方程式も方向 (θ) に関して一様（対称）であることに由来する．

この時，(16) より，$R''(r) + \dfrac{1}{r}R'(r) = 0$ となるが，$r > 0$ を考慮すると，結局

$$rR''(r) + R'(r) = 0, \quad R(a) = p, R(b) = q$$

という**常微分方程式の境界値問題**になる．

$$r\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{dR}{dr}=\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=0 \ \Leftrightarrow\ \frac{dR}{dr}=\frac{C}{r}$$

より，その一般解は，C, D を定数として，

$$R(r)=C\log r+D$$

C, D は境界条件 $R(a)=p, R(b)=q$ より，$C=\dfrac{p-q}{\log a-\log b}$, $D=\dfrac{p\log b-q\log a}{\log b-\log a}$.

よって，この問題の場合は，以下のような簡単で具体的な形が求まる．

$$\begin{aligned}u(x,y) &= R(r(x,y))=\frac{1}{\log b-\log a}((q-p)\log\sqrt{x^2+y^2}+p\log b-q\log a)\\ &= \frac{1}{\log b-\log a}\left(q\log\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}+p\log\frac{b}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

ラプラス方程式の境界値問題の解の一意性

一般に以下の「**ラプラシアンの最大値原理**」が成り立つ（→オンライン付録）．n 次元空間内の有界な閉集合 D とその境界 ∂D を考える．D 上で定義された連続関数 $u(\boldsymbol{x})$ に対して，

- $\Delta u(\boldsymbol{x})\geq 0\ (\boldsymbol{x}\in D\setminus\partial D)$ **ならば，**$u(\boldsymbol{x})$ **は境界** ∂D **上の点で最大値を取る．**
- $\Delta u(\boldsymbol{x})\leq 0\ (\boldsymbol{x}\in D\setminus\partial D)$ **ならば，**$u(\boldsymbol{x})$ **は境界** ∂D **上の点で最小値を取る．**

ただし，$D\setminus\partial D$ は D の内部を表す（$\setminus$ は集合差の記号）．

これは，１次元ではよく知っている，２階微分と下に凸・上に凸の関係である．それが，一般に多次元でも成り立つ．**この最大値原理を示せば，ラプラス方程式の境界値問題の解の一意性は簡単に証明できる（各自考えてみてください）．**

オンライン付録

A-1. 級数解の一様収束性（１次元波動方程式の初期値境界値問題）

示すべきことは (7) および (11) の右辺の一様収束性であり，

- A_n が $f(x)$ の滑らかさに応じて，n の増加に対して急減少すること，
- B_n が $g(x)$ の滑らかさに応じて，n の増加に対して急減少すること，

から，項別微分する際に出てくる n, n^2 を打ち消して一様収束することが言える．

つまり，初期状態を表す関数が滑らか（より高階まで連続微分可能）なほど，初期値境界値問題の解の滑らかさを保証し，フーリエ級数を使った構成の証明を簡単にする．

(7) および (11) の右辺のうちのどれでも１つを $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t,x)$ と置いた時，

$Q_{n_0,m}(t,x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \displaystyle\sum_{n=n_0}^{n_0+m} q_n(t,x)$ として，$\varepsilon > 0$ に対して大きな n_0 を取れば，

$$|Q_{n_0,m}(t,x)| \quad \leq \quad \varepsilon \qquad \text{for} \qquad m = 0, 1, \ldots ; 0 \leq t, -\infty < x < \infty \tag{19}$$

となることを示せばよい．

例えば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -(n\pi)^2 \left(B_n \sin n\pi t + A_n \cos n\pi t\right) \sin n\pi x$ の一様収束性を示す場合，

$$q_n(t,x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -(n\pi)^2 \left(B_n \sin n\pi t + A_n \cos n\pi t\right) \sin n\pi x$$

と置き，(19) を証明しよう．

まず，$\sin 0 = \sin n\pi = 0$, $f(0) = f(1) = 0$, $f''(0) = f''(1) = 0$, 及び f の滑らかさの仮定を用いて，部分積分を繰り返すと，

$$\begin{aligned}
\frac{A_n}{2} &= \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi}\left([f(x)\cos n\pi x]_0^1 - \int_0^1 f'(x) \cos n\pi x dx \right) \\
&= \frac{1}{n\pi} \int_0^1 f'(x) \cos n\pi x dx \\
&= \frac{1}{(n\pi)^2}\left([f'(x)\sin n\pi x]_0^1 - \int_0^1 f''(x) \sin n\pi x dx \right) \;=\; \ldots \\
&= \frac{1}{(n\pi)^3}\left([f''(x)\cos n\pi x]_0^1 - \int_0^1 f'''(x) \cos n\pi x dx \right) \;=\; \ldots \\
&= -\frac{1}{(n\pi)^4}\left([f'''(x)\sin n\pi x]_0^1 - \int_0^1 f''''(x) \sin n\pi x dx \right) \\
&= \frac{1}{(n\pi)^4} \int_0^1 f''''(x) \sin n\pi x dx \\
|A_n| &\leq \frac{2}{(n\pi)^4} \int_0^1 |f''''(x)| dx \leq \frac{K_1}{n^4} \qquad \text{ただし}, K_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{2}{\pi^4} \max_{0 \leq x \leq 1} |f''''(x)|
\end{aligned}$$

同様に，$\sin 0 = \sin n\pi = 0$, $g(0) = g(1) = 0$, 及び g の滑らかさの仮定を用いて，部分積分を繰り返すと，ある定数 K_2 があって，

$$\begin{aligned}
\frac{n\pi B_n}{2} &= \int_0^1 g(x)\sin n\pi x dx = -\frac{1}{n\pi}\left([g(x)\cos n\pi x]_0^1 - \int_0^1 g'(x)\cos n\pi x dx\right) = \dots \\
&= \frac{1}{(n\pi)^3}\left([g''(x)\cos n\pi x]_0^1 - \int_0^1 g'''(x)\cos n\pi x dx\right) \\
|B_n| &\le \frac{2}{(n\pi)^4}\max(|g''(1)|, |g''(0)|)\times 2 + \frac{2}{(n\pi)^4}\max_{0\le x\le 1}|g'''(x)| \ \le\ \frac{K_2}{n^4}
\end{aligned}$$

一方，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$ なので，どんな $\varepsilon > 0$ に対しても十分大きな n_0 を取れば，任意の $m = 0, 1, \dots$, $t_0 \le t$, $-\infty < x < \infty$ に対して，

$$\begin{aligned}
|Q_{n_0,m}(t,x)| &\le \sum_{n=n_0}^{n_0+m}|q_n(t,x)| \le \sum_{n=n_0}^{n_0+m}(n\pi)^2\left(|B_n||\sin n\pi t| + |A_n||\cos n\pi t|\right)|\sin n\pi x| \\
&\le \sum_{n=n_0}^{n_0+m}(n\pi)^2\left(\frac{K_1}{n^4} + \frac{K_2}{n^4}\right) = \pi^2(K_1+K_2)\sum_{n=n_0}^{n_0+m}\frac{1}{n^2} \le \varepsilon
\end{aligned}$$

A-2. ２次元極座標のラプラシアン

一般に，$(x,y) \Leftrightarrow (p,q)$ の座標変換を $\left\{\begin{array}{ll} x &= g_1(p,q) \\ y &= g_2(p,q)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} p &= f_1(x,y) \\ q &= f_2(x,y)\end{array}\right.$

$$w(p,q) = u(g_1(p,q), g_2(p,q)) \ \Leftrightarrow\ u(x,y) = w(f_1(x,y), f_2(x,y))$$

と置くと，$\displaystyle\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial q}\frac{\partial f_2}{\partial x}$．詳しく書くと任意の点 (x,y) において，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \ = \ \frac{\partial w}{\partial p}(f_1(x,y), f_2(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial w}{\partial q}(f_1(x,y), f_2(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

これは同時に以下も意味する：任意の点 (p,q) において，

$$\frac{\partial u}{\partial x}(g_1(p,q), g_2(p,q)) = \frac{\partial w}{\partial p}(p,q)\frac{\partial f_1}{\partial x}(g_1(p,q), g_2(p,q)) + \frac{\partial w}{\partial q}(p,q)\frac{\partial f_2}{\partial x}(g_1(p,q), g_2(p,q))$$

そこで，式 (15) の意味と計算の流れを示す．

まず，極座標の定義より，$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$. ただし，$\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ は，厳密には，x, y の正負（４通り）によって，$0 \le \theta \le 2\pi$ を４つの領域に分割し，

- $x \ge 0, y \ge 0 \ \leftrightarrow 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$， $x \le 0, y \ge 0 \ \leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$，
- $x \le 0, y \le 0 \ \leftrightarrow \pi \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2}$， $x \ge 0, y \le 0 \ \leftrightarrow \dfrac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$．

のように対応させ，明示する場合は，$\theta = \mathrm{Atan}(x,y)$ と書くことにする．

r,θ を x,y の関数とみて，それらで偏微分すると，

- $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{r},\quad \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r},$
- $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\dfrac{-y}{x^2} = -\dfrac{y}{r^2},\quad \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{1}{1+y^2/x^2}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{r^2}$
- $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r}\right) = \dfrac{1}{r} - \dfrac{x}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{r^2-x^2}{r^3} = \dfrac{y^2}{r^3},\quad \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{r^3}$
- $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{y}{r^2}\right) = -y\left(-\dfrac{2}{r^3}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{2xy}{r^4},\quad \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\dfrac{2xy}{r^4}$

$w(r,\theta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対し，$w_r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial w}{\partial r}$, $w_\theta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$, $w_{r\theta} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}, \ldots$ のように表記し（簡単のために），

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} w(r,\theta) \quad (\text{ただし } r=\sqrt{x^2+y^2},\ \theta=\mathrm{Atan}(x,y)) \\
&= w_r(r(x,y),\theta(x,y))\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + w_\theta(r(x,y),\theta(x,y))\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(w_r(r(x,y),\theta(x,y))\frac{\partial r}{\partial x}(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(w_\theta(r(x,y),\theta(x,y))\frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y)\right) \\
&= \left(w_{rr}\frac{\partial r}{\partial x} + w_{\theta r}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + w_r\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \left(w_{\theta\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + w_{r\theta}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + w_\theta\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
&= w_{rr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + 2w_{r\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial x} + w_{\theta\theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + w_r\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + w_\theta\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

のように進めて，Δu を計算する．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = Aw_{rr} + 2Bw_{r\theta} + Cw_{\theta\theta} + Dw_r + Ew_\theta$$

と置くと，　$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1,$

$$B \stackrel{\mathrm{def}}{=} 2\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = 2\left(\frac{x}{r}\left(-\frac{y}{r^2}\right) + \frac{y}{r}\cdot\frac{x}{r^2}\right) = 0,$$

$$C \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{r^4} + \frac{x^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}, D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \ldots = \frac{1}{r}, E \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \ldots = 0$$

よって，

$$\Delta u\,(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$w_{rr}(r(x,y),\theta(x,y)) + \frac{1}{r(x,y)^2}w_{\theta\theta}(r(x,y),\theta(x,y)) + \frac{1}{r(x,y)}w_r(r(x,y),\theta(x,y)) = 0$$

A-3. ラプラシアンの最大値原理の証明

以下，２次元で書くが次元には関係ない．例えば，

- $\Delta u(\boldsymbol{x}) \geq 0\,(\boldsymbol{x} \in D \setminus \partial D)$ ならば，$u(\boldsymbol{x})$ は境界 ∂D 上の点で最大値を取る．

を証明するには，$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,y)\in\partial D} u(x,y)$ と置いて，$u(x,y) \leq M\ (\forall (x,y) \in D)$ を示せばよい．

そのために，任意の $(x_0, y_0) \in D$ を固定し，$D \subset \{(x,y) \mid |x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 \leq a^2\}$ となるような十分大きい半径 a を考える．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$w_\varepsilon(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,y) - M - \varepsilon(a^2 - |x-x_0|^2 - |y-y_0|^2), \quad (x,y) \in D$$

を定義し，$w_\varepsilon(x,y) \leq 0$ を示せばよい．なぜなら，

$$u(x,y) - M \ \leq \ \varepsilon(a^2 - |x-x_0|^2 - |y-y_0|^2), \quad \forall \varepsilon > 0$$

が言えるならば，右辺は正で，かつ ε はいくらでも 0 に近づけることができるので，$u(x,y) - M \leq 0$ が言えることになる．

そこで，以下は，$(x^*, y^*) \in D$ で w_ε が最大値を取るとし，$w_\varepsilon(x^*, y^*) > 0$ （つまり，最大値が正）と仮定して，矛盾を導く．

- M の定義より，$\forall (x,y) \in \partial D$ （D の境界）では，$u(x) - M \leq 0$ であり，a は十分大きいので，$\forall (x,y) \in \partial D$ において，

  $$w_\varepsilon(x,y) = u(x,y) - M + \varepsilon(|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2 - a^2) \leq 0 + 0 = 0$$

  よって，$(x^*, y^*) \notin \partial D$.

- 一方，もし，$(x^*, y^*) \in D \setminus \partial D$ ならば，$\dfrac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x^2}(x^*, y^*) \leq 0$, $\dfrac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial y^2}(x^*, y^*) \leq 0$ より，$\Delta w_\varepsilon(x^*, y^*) \leq 0$ のはず．一方，$\forall (x,y) \in D \setminus \partial D$ において，

  $$\Delta w_\varepsilon(x,y) = \Delta u(x,y) + \varepsilon \Delta(|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2) \geq 0 + \varepsilon \times 4 = 4\varepsilon > 0$$

  なので，$(x^*, y^*) \notin D \setminus \partial D$ を意味する．

つまり,「w_ε の最大値が正」という仮定は矛盾を導いたので，$w_\varepsilon(x,y) \leq 0$, $\forall (x,y) \in D$.