

- ベッセル方程式とベッセル関数
- 2次元円領域での波動方程式の初期値境界値問題
- 前回の前半模擬テスト・後半模擬テストの解説を Moodle の「応用解析学」コースに置いた．期末試験解説も後日置く．
- オンライン資料のurl変更:http://nmlab.cse.kyutech.ac.jp/?page_id=107

22. Bessel 方程式と Bessel 関数

次章で，2次元の波動方程式の円領域での初期値境界値問題（例：ドラムの膜の振動）を，変数分離法によって，各変数毎の常微分方程式に帰着するが，先に，そこで現れるベッセル方程式とその解（ベッセル関数）を調べる．

非負実数 $p (\geq 0)$ に対して， p -次ベッセル方程式を考える： ($0 < x$)

$$\frac{1}{x} (xJ'(x))' + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) J(x) = J''(x) + \frac{1}{x} J'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) J(x) = 0 \quad (1)$$

実は，級数 (2) で定義される関数は，この方程式 (1) の $x = 0$ で発散しない解の1つになり（第一種） p -次ベッセル関数 $J_p(x)$ と呼ぶ．これが方程式 (1) を満たすことは，実際微分して確かめればよい（オンライン付録）．

ベッセル関数は，ガンマ関数などと同様に「特殊関数」の1つである．

$J_p(x)$ は ($0 \leq x$)，階乗（一般にガンマ関数）の逆数を係数に含む巾級数と非整数巾 (x^p) の積の形の表現を持つ． p は非負実数．

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (2)$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (\text{特に } p \text{ が非負整数 } n \text{ の場合})$$

例えば，

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2^4} - \frac{x^6}{6^2 \cdot 2^6} + \dots$$

ベッセル関数の直交性

式 (1) のベッセル方程式の解の1つである（第一種） p -次ベッセル関数 $J_p(x)$ は，任意の $p (\geq 0)$ を固定して，ある種の直交性を持つ．

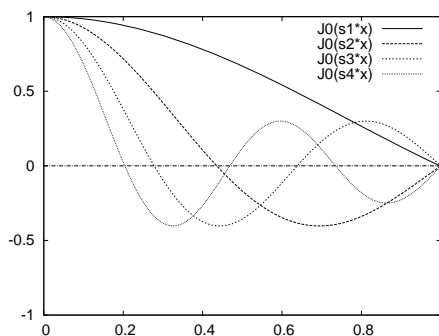
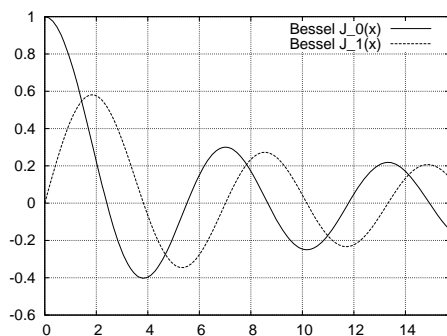
級数の項の形から， $J_0(x)$ ($0 \leq x$) は

$$\bullet \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{や} \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

との類似が予想されるが，実際， $J_0(x)$ や $J_1(x)$ のグラフは下図左のようになる．
以降，任意の p を固定して考えているので， $J_p(x)$ をここでは単に $J(x)$ と書く．一般に以下の性質を持つ．

(i) $J(s) = 0$ の正の実根は無有限個あることが知られている． $0 < s_1 < s_2 < \dots$ と書くことにする（もちろん p に依存するので，正確には， $0 < s_{p,1} < s_{p,2} < \dots$ ）

$f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} J\left(\frac{s_k x}{a}\right)$ と置くと， $f_k(a) = 0$ となる（下図右， $a = 1$ の場合）．



(ii) 直交性：正実数 $a > 0$ に対し， $\int_0^a x J\left(\frac{s_i x}{a}\right) J\left(\frac{s_j x}{a}\right) dx \begin{cases} = 0 & (i \neq j) \\ > 0 & (i = j) \end{cases}$.

$J(s_i) = 0$ より，被積分関数は区間の両端 ($x = 0, a$) で 0 になる点に注意．

(iii) さらに，(ii) に基づき， $[0, a]$ で 2 乗積分可能な関数 f, g に対して，

$$- \langle f, g \rangle = \int_0^a x f(x) g(x) dx$$

で内積を定義する時， $\psi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{D_k}} J\left(\frac{s_k x}{a}\right)$ と置くと，

$$\{\psi_k(x) \mid k = 1, 2, \dots\}$$

は「完全正規直交系」になることが知られている．ただし，正規化係数

$$D_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^a x \left(J\left(\frac{s_k x}{a}\right) \right)^2 dx = \langle J\left(\frac{s_k x}{a}\right), J\left(\frac{s_k x}{a}\right) \rangle = \left\| J\left(\frac{s_k x}{a}\right) \right\|^2$$

なお， s_k の定義より， $y = \psi_k(x)$ ($0 \leq x \leq a$) のグラフは， $[0, a]$ 区間内で x -軸と k 回交わる．上図右は $p = 0, a = 1$ の場合の例，つまり， $y = J_0(s_{0,k} x)$ ， $k = 1, 2, 3, 4$ のグラフを示す．

そこで，フーリエ級数展開と同様に以下のような級数展開が成立： $[0, a]$ で滑らかな連続関数 $f(x)$ に対し（実際はもう少し緩い条件で）， $0 < x < a$ において，

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J\left(\frac{s_k x}{a}\right), \quad A_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{D_k} \int_0^a x J\left(\frac{s_k x}{a}\right) f(x) dx$$

この級数の収束性，上の (i) や (iii)，および級数展開の証明は（大変なので）省略し，以下では，その根本原理である，(ii) の直交性のみを，任意の p で $a = 1$ の場合を示す．式 (1) より，

$$x^2 J''(x) + x J'(x) + (x^2 - p^2) J(x) = 0 \quad (0 < x)$$

天下りではあるが，ここで， $x = s_k y$ ($0 < y$) を代入して一部を移項すると，

$$(s_k)^2 y^2 J''(s_k y) + s_k y J'(s_k y) = -(s_k)^2 y^2 J(s_k y) + p^2 J(s_k y)$$

上式の $k = i$ の場合に $J(s_j y)$ を掛けたものと，上式の $k = j$ の場合に $J(s_i y)$ を掛けたものの差を取ると， $p^2 J(s_j y) J(s_i y)$ が打ち消し合い，

$$\begin{aligned} & \left((s_i)^2 y^2 J''(s_i y) + s_i y J'(s_i y) \right) J(s_j y) - \left((s_j)^2 y^2 J''(s_j y) + s_j y J'(s_j y) \right) J(s_i y) \\ & = \left((s_j)^2 - (s_i)^2 \right) y^2 J(s_j y) J(s_i y) + 0 \end{aligned}$$

$(s_i)^2 y J''(s_i y) + s_i J'(s_i y) = \frac{d}{dy} (s_i y J'(s_i y))$ に注意し，両辺を y で割ってから， y に関して $[0, 1]$ で積分する．

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ J(s_j y) \frac{d}{dy} (s_i y J'(s_i y)) - J(s_i y) \frac{d}{dy} (s_j y J'(s_j y)) \right\} dy \\ & = \left((s_j)^2 - (s_i)^2 \right) \int_0^1 y J(s_j y) J(s_i y) dy \end{aligned} \quad (3)$$

ここで，式 (3) の左辺の第一項 $J(s_j y) \frac{d}{dy} (s_i y J'(s_i y))$ は，

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} (J(s_j y) s_i y J'(s_i y)) = s_i s_j y J'(s_i y) J'(s_j y) + J(s_j y) \frac{d}{dy} (s_i y J'(s_i y)) \\ & [J(s_j y) s_i y J'(s_i y)]_0^1 = \int_0^1 \left(s_i s_j y J'(s_i y) J'(s_j y) + J(s_j y) \frac{d}{dy} (s_i y J'(s_i y)) \right) dy \end{aligned}$$

を利用して部分積分できる．

同様に式 (3) の左辺の第二項 $-J(s_i y) \frac{d}{dy} (s_j y J'(s_j y))$ も部分積分すると，第一項と第二項で， $\int_0^1 s_i s_j y J'(s_i y) J'(s_j y) dy$ が共通かつ逆符号なので相殺されて，結局，

$$\begin{aligned} \text{式 (3) の左辺} & = [J(s_j y) s_i y J'(s_i y)]_0^1 - [J(s_i y) s_j y J'(s_j y)]_0^1 \\ & = (0 - 0) - (0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

ただし最後の等式は， $J(s_j) = J(s_i) = 0$ を用いた．よって，式(3)の右辺より，

$$\left((s_j)^2 - (s_i)^2 \right) \int_0^1 y J(s_j y) J(s_i y) dy = 0$$

最後に， $s_j \neq s_i$ なので， $\int_0^1 y J(s_j y) J(s_i y) dy = 0$ が導かれた．

23. 2次元空間での初期値境界値問題(2)

2次元の波動方程式の初期値境界値問題

(要点): 2次元の波動方程式の円領域での初期値境界値問題を，変数分離法によって，各変数毎の常微分方程式に帰着し，三角関数とベッセル関数を利用して，初期値を満たす($t=0$ で与えられた初期波形と一致する)ような解を構成する(フーリエ・ベッセル級数展開)．

平面上の原点中心・半径 $a(>0)$ の円周を外枠とする薄い円形膜の垂直方向の振動を考える．時刻 t 位置 (x, y) での垂直方向のずれ(変位)を関数 $u(t, x, y)$ とする．膜の周は固定されている．初期状態(時刻0)での各位置での膜の変位は関数 $f(x, y)$ として与えられ，またその時の変位の変化速度は(簡単のために)0とする．ただし重力の影響を考えない．平面領域とその境界：

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad \partial D \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) | x^2 + y^2 = a^2\}$$

を定義する．

未知関数 $u(t, x, y)$ として， $(t, x, y) \in [0, \infty) \times D$ で連続で，その内部では滑らかで，以下を満たすものを求める．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) \quad \text{for } t > 0, (x, y) \in D \setminus \partial D \quad (4)$$

$$u(t, x, y) = 0 \quad \text{for } t \geq 0, (x, y) \in \partial D \quad (5)$$

$$u(0, x, y) = f(x, y), \quad \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = 0 \quad \text{for } (x, y) \in D \quad (6)$$

ただし， $f(x, y)$ は十分滑らか(十分な回数連続微分可能)とする．

円領域なので，前回同様，まず極座標に変換する：

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Atan}(x, y) \end{cases}$$

ただし， $\theta = \text{Atan}(x, y)$ は， $\tan \theta = \frac{y}{x}$ となる θ を， x, y の正負の組み合わせで $[0, 2\pi]$ の範囲に規定する逆関数とする(前回付録参照)．そして，

$$u(t, x, y) = u(t, r \cos \theta, r \sin \theta) = w(t, r, \theta)$$

と置いて、以下の「未知関数を w とする初期値境界値問題」を解けばよい。ただし、 $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = v(r, \theta)$ と置いた。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, r, \theta) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(t, r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(t, r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}(t, r, \theta), \quad 0 < t, 0 < r < a, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (7)$$

$$w(t, a, \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (8)$$

$$w(t, r, 0) = w(t, r, 2\pi), \quad 0 \leq r \leq a \quad (9)$$

$$w(0, r, \theta) = v(r, \theta), \quad (10)$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial w}{\partial t}(t, r, \theta) = 0, \quad 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (11)$$

「変数分離法」によってこの解を求めてみよう。つまり、

$$w(t, r, \theta) = T(t)R(r)H(\theta), \quad T(t) \neq 0, R(r) \neq 0, H(\theta) \neq 0$$

のような形（変数分離形）で、(7),(8),(9),(11) を満す関数をまず探す。

注：一般論として、時間変数 t と空間変数 (x, y) に変数分離してみると、

$$u(t, x, y) = T(t)V(x, y), \quad T(t) \neq 0, V(x, y) \neq 0$$

と置ける。上の偏微分方程式を満たすなら、

$$T''(t)V(x, y) = T(t)\Delta V(x, y)$$

となり、 $\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta V(x, y)}{V(x, y)}$ が成り立つが、この左辺は x, y に依らず、右辺は t に依らないので、結局、 λ という定数（固有値）を用いて、

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0, \quad \Delta V(x, y) - \lambda V(x, y) = 0$$

右側の方程式を、一般に、Helmholtz（ヘルムホルツ）方程式と呼ぶ。3次元以上でも同様であり、今まで見た1次元の場合もこれに含まれる。Helmholtz 方程式（固有値問題）を対応する境界条件に応じて解くには、結局、再度、変数分離/変数変換を行う必要があるが、一般には、講義で扱う例題のように具体的な級数の形で解を構成できるとは限らない。そのため（本講義のレベルを超える）対称核積分方程式というものを介して、解の存在や具体的な性質を調べる方法が研究され、量子力学の数学的基礎にもなっている。

元の問題に戻る。まず、(7) より、

$$T''RH = TR''H + \frac{1}{r^2}TRH'' + \frac{1}{r}TR'H$$

となり，特に， $T(t)R(r)H(\theta) \neq 0$ なる点 (t, r, θ) では，それで割れば，

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{1}{R(r)} \left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) + \frac{H''(\theta)}{r^2 H(\theta)}$$

この左辺は r, θ に依らず，右辺は t に依らないので，ある定数 $(-\lambda)$ である．また，定数である右辺の第 1 項は θ に依らないので，右辺第 2 項もそうであり，よって $\frac{H''(\theta)}{H(\theta)}$ もある定数 $(-\mu)$ である．

さらに制約条件：(8),(9),(11) も合わせて，

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (0 < t), \quad \lim_{t \rightarrow +0} T'(t) = 0 \quad (12)$$

$$H''(\theta) + \mu H(\theta) = 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad H(0) = H(2\pi) \quad (13)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (0 < r < a), \quad R(a) = 0 \quad (14)$$

- (12) が $t \rightarrow \infty$ で有界な（かつ定数でない）解を持つためには， $\lambda > 0$ が必要である．この一般解は， $T(t) = b_1 \cos \sqrt{\lambda} t + b_2 \sin \sqrt{\lambda} t$ であるが，初期条件：

$$\lim_{t \rightarrow +0} T'(t) = \lim_{t \rightarrow +0} (-b_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t + b_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t) = b_2 \sqrt{\lambda} = 0$$

を満たすには， $b_2 = 0$ が必要で，以下の形になる（ b は任意定数）：

$$T(t) = b \cos \sqrt{\lambda} t \quad (15)$$

- (13) の解は，境界条件： $H(0) = H(2\pi)$ より， $H(\theta) = c \cos \sqrt{\mu} \theta + d \sin \sqrt{\mu} \theta$ の形（ c, d は任意定数）で，かつ μ が限られた値（固有値）：

$$\mu = n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

の場合のみである．よって，この一般解は，各 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$H(\theta) = c \cos n\theta + d \sin n\theta \quad (17)$$

ただし， $n = 0$ では， $H''(\theta) = 0$ と境界条件より， H は定数関数（ $H(\theta) \equiv c$ ）．

- (14) は，天下りではあるが， $x \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda} r$ ， $J(x) \stackrel{\text{def}}{=} R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ と置くと，

$$R''\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{\sqrt{\lambda}}{x} R'\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \left(\lambda - \frac{\lambda\mu}{x^2} \right) R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

両辺を λ で割り， $J'(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} R'\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ ， $J''(x) = \frac{1}{\lambda} R''\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ を用いると，

$$J''(x) + \frac{1}{x} J'(x) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) J(x) = 0 \quad (18)$$

を満たす「Bessel（ベッセル）方程式」である．

(第一種) n -次ベッセル関数 $J_n(x)$ は, 方程式 (18) の解のうちで, $x \rightarrow 0$ で (この場合 $r \rightarrow 0$ に対応) 有界なものである. 以下は, 何らかの方法で $J_n(x)$ の性質を解析したり, 数値的に計算したりすることができるとして, 先に進む.

- (14) の $R(a) = 0$ という条件は, $J_n(\sqrt{\lambda}a) = 0$ を意味する.

そこで, $J_n(x) = 0$ の正実根を考える必要がある. 前章で述べたように $J_n(x) = 0$ は無限個の正実根を持つが, それらを $0 < s_{n,1} < s_{n,2} < \dots$ と置くと, λ は,

$$\lambda_{n,k} = \left(\frac{s_{n,k}}{a} \right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots)$$

の形のみ許される.

以上より, $\{b_{n,k}, c_n, d_n, e_{n,k} \mid n = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots\}$ を任意定数として,

- $T_{n,k}(t) \stackrel{\text{def}}{=} b_{n,k} \cos \frac{s_{n,k}t}{a} \quad (0 \leq t),$
- $H_n(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$
- $R_{n,k}(r) \stackrel{\text{def}}{=} e_{n,k} J_n \left(\frac{s_{n,k}r}{a} \right) \quad (0 \leq r \leq a),$

は, 各々, (12), (13), (14) の解である. よって

$$T_{n,k}(t)H_n(\theta)R_{n,k}(r) = \cos \frac{s_{n,k}t}{a} \times (A_{n,k} \cos n\theta + B_{n,k} \sin n\theta) \times J_n \left(\frac{s_{n,k}r}{a} \right)$$

($\{A_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} b_{n,k}c_n e_{n,k}, B_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} b_{n,k}d_n e_{n,k}\}$ を任意定数として) は, (7),(8),(9),(11) を満し, 斉次微分方程式重ね合わせの原理より, それらの有限線形和もそうである.

実は, 初期値 $v(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ に合わせて, $\{A_{n,k}, B_{n,k}\}_{n=0,1,\dots,k=1,2,\dots}$ を適切に選ぶと,

$$w^*(t, r, \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{s_{n,k}t}{a} (A_{n,k} \cos n\theta + B_{n,k} \sin n\theta) J_n \left(\frac{s_{n,k}r}{a} \right) \quad (19)$$

は, 定義可能で (右辺が収束して), (7),(8),(9),(10),(11) の解になる.

以下で粗筋を示す. まず, 初期値 (10): $w^*(0, r, \theta) = v(r, \theta)$ を満すように, $\{A_{i,j}, B_{i,j}\}_{i=0,1,\dots,j=1,2,\dots}$ を決めるためには, v が,

$$v(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{i,j} \cos i\theta + B_{i,j} \sin i\theta) J_i \left(\frac{s_{i,j}r}{a} \right)$$

と級数展開できる必要がある. これをフーリエ・ベッセル級数展開と呼ぶ. 級数の収束の証明は省略して, 先に進む. 代わりに, $v(r, \theta)$ が級数展開できると仮定して, 具体的な係数 A_*, B_* を求めてみる.

まず、ある n を固定して、 $v(r, \theta)$ と $\cos n\theta$ を掛け合わせ、 θ に関して $[-\pi, \pi]$ で積分して r の関数を作ることで、三角関数の直交性より、 $i \neq n$ の $A_{i,j}$ を消すことができる。 $B_{i,j}$ についても同様。

$$\begin{aligned}
C_n(r) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) \cos n\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (A_{i,j} \cos i\theta + B_{i,j} \sin i\theta) J_i \left(\frac{s_{i,j}r}{a} \right) \right) \cos n\theta d\theta \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (A_{i,j} \cos i\theta + B_{i,j} \sin i\theta) \cos n\theta d\theta \right) J_i \left(\frac{s_{i,j}r}{a} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} A_{n,j} J_n \left(\frac{s_{n,j}r}{a} \right), \\
S_n(r) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) \sin n\theta d\theta = \sum_{j=1}^{\infty} B_{n,j} J_n \left(\frac{s_{n,j}r}{a} \right) \quad (20)
\end{aligned}$$

さらに、ベッセル関数のある種の直交性：

$$\int_0^a r J_n \left(\frac{s_{n,k}r}{a} \right) J_n \left(\frac{s_{n,l}r}{a} \right) dr = 0 \quad (k \neq l)$$

を使うと、同様に、ある k を固定し、 $C_n(r)$ と $r J_n \left(\frac{s_{n,k}r}{a} \right)$ を掛け合わせ、 r に関して $[0, a]$ で積分することで $A_{n,k}$ が取り出せる。 $B_{n,k}$ も同様。

すなわち、正規化係数を $D_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^a r \left(J_n \left(\frac{s_{n,k}r}{a} \right) \right)^2 dr$ として、展開係数は、

$$A_{n,k} = \frac{1}{D_{n,k}} \int_0^a C_n(r) r J_n \left(\frac{s_{n,k}r}{a} \right) dr, \quad B_{n,k} = \frac{1}{D_{n,k}} \int_0^a S_n(r) r J_n \left(\frac{s_{n,k}r}{a} \right) dr \quad (21)$$

と計算される。

実際、この式 (21) で定義した $\{A_{n,k}, B_{n,k}\}$ を用いて構成した級数は収束し、それによって表現される (19) の w^* が (7),(8),(9),(10),(11) を満たすことは、各級数やそれらを形式的に項別微分した級数の一様収束性 (ベッセル関数の性質を調べることで判る) から証明できる。

元の問題に戻ると、式 (20) と (21) で定義される $\{A_{n,k}, B_{n,k}\}$ を用いて、

$$\begin{aligned}
u(t, x, y) &= w^*(t, \sqrt{x^2 + y^2}, \text{Atan}(x, y)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{s_{n,k}t}{a} \times (A_{n,k} \cos (n \cdot \text{Atan}(x, y)) \\
&\quad + B_{n,k} \sin (n \cdot \text{Atan}(x, y))) \times J_n \left(\frac{s_{n,k}}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right)
\end{aligned}$$

を定義可能で (右辺が収束)、(4) & (5) & (6) の解になる。

オンライン付録

A-1. Bessel 級数が Bessel 方程式を満たすことの証明

級数 (2) が方程式 (1) の解になることを示そう。これは級数関数の微分 (極限と微分の順序交換) の問題。

まず級数 (2) の任意の有限区間内での一様収束を示す。 $J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)$ と書くと、ざっくりいえば、 x がある有限区間内であれば、 $|a_k(x)| \leq \frac{C^k}{k!}$ なので、一様収束する。詳しく見ると、 $\Gamma(y)$ は、 $y > 0$ で正の最小値を持つので、それを A と置くと、任意の正数 B に対して、 $0 < x \leq 2\sqrt{B}$ なる x では、 $|a_k(x)| \leq \frac{1}{k!A} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \leq \frac{B^k}{k!A}$ であり、 $|J_p(x)| \leq \frac{B^{p/2}}{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ なので、一様収束が言える。

同様に、形式的に項別微分した級数も一様収束するので (項別微分によって) 微分が計算できる。

$$\begin{aligned} J_p(x) &= \frac{1}{2^p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{p+2k}}{k! \Gamma(p+k+1) 2^{2k}} \right) = \frac{1}{2^p} \left(\frac{x^p}{\Gamma(p+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{p+2k}}{k! \Gamma(p+k+1) 2^{2k}} \right) \\ \frac{1}{x} J'_p(x) &= \frac{1}{2^p} \left(\frac{p}{\Gamma(p+1)} x^{p-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (p+2k+2)}{(k+1)! \Gamma(p+k+2) 2^{2k+2}} x^{p+2k} \right) \\ J''_p(x) &= \frac{1}{2^p} \left(\frac{p(p-1)}{\Gamma(p+1)} x^{p-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (p+2k+2)(p+2k+1)}{(k+1)! \Gamma(p+k+2) 2^{2k+2}} x^{p+2k} \right) \\ \frac{p^2}{x^2} J_p(x) &= \frac{p^2}{2^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1) 2^{2k}} x^{p+2k-2} \\ &= \frac{1}{2^p} \left(\frac{p^2}{\Gamma(p+1)} x^{p-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} p^2}{(k+1)! \Gamma(p+k+2) 2^{2k+2}} x^{p+2k} \right) \end{aligned}$$

あとは、 $J''_p(x) + \frac{1}{x} J'_p(x) + J_p(x) - \frac{p^2}{x^2} J_p(x)$ に含まれる同次の項を比較して、すべて消える (0 になる) ことが、頑張れば計算すれば確認できる。

簡単のために $p = n$ (自然数) の場合を計算してみよう。

- x^{n-2} の係数: $J''_n(x)$, $\frac{1}{x} J'_n(x)$, $-\frac{n^2}{x^2} J_n(x)$ の各々の先頭項に含まれ、合わせると、 $\frac{1}{2^n n!} (n(n-1) + n - n^2) = 0$
- $k = 0, 1, \dots$ に対する x^{n+k} の係数: J''_n , $\frac{1}{x} J'_n$, J_n , $-\frac{n^2}{x^2} J_n$ の各々の共通部分として $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(n+k+1)! 2^{2k+2}}$ を括ると、

$$(n+2k+2)(n+2k+1) + (n+2k+2) - (k+1)(n+k+1) 2^2 - n^2$$

が出るが、これを n と k の多項式と見る時の各項の係数は

- $n^2: 1 + 0 - 0 - 1 = 0, \quad nk: 4 + 0 - 4 - 0 = 0, \quad k^2: 4 + 0 - 4 - 0 = 0$
- $n: 3 + 1 - 4 - 0 = 0, \quad k: 6 + 2 - 8 - 0 = 0, \quad 1: 2 + 2 - 4 - 0 = 0$

以上より，すべての係数が0であることが示せた．

A-2. ベッセル関数の積分表現

整数次のベッセル関数は， $\cos(x \sin y)$ ， $\sin(x \sin y)$ のような関数の積分の形の表現を持つ．つまり，

$$\cos(x \sin y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cos ny, \quad \sin(x \sin y) = \sum_{k=0}^{\infty} b_n \sin ny$$

と（変数 y に関して）フーリエ級数展開できるとして，その展開係数に（ x を変数とする）ベッセル関数が現われる．

$$J_0(x) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin y) dy, \quad J_{2n}(x) = \frac{a_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin y) \cos ny dy$$

$$J_{2n-1}(x) = \frac{b_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x \sin y) \sin ny dy$$

これらは， $\cos \theta$ ， $\sin \theta$ のテーラ級数展開： $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \theta^{2k}$ ， $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \theta^{2k+1}$ を用いて，

$$\cos(x \sin y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} (\sin y)^{2k}, \quad \sin(x \sin y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} (\sin y)^{2k+1},$$

と通常の三角関数の巾乗の和に展開し，ひたすら三角関数（の積）の積分を計算すれば，前項の級数が導出可能である．例えば，

$$\begin{aligned} a_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x \sin y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} (\sin y)^{2k} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin y)^{2k} dy = \dots = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \frac{2(2k)! \pi}{(k!)^2 2^{2k}} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} x^{2k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 2J_0(x) \end{aligned}$$

なお，上の...の部分は，以前のガンマ関数を介した $\int_0^{\pi/2} (\cos y)^m (\sin y)^n dy$ の計算： $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin y)^{2k} dy = 4 \int_0^{\pi/2} (\sin y)^{2k} dy = 4 \times \frac{(2k)! \pi}{(k!)^2 2^{2k+1}}$ を用いるか，あるいは， k に関する帰納法を使って示すことができる．

さらに，非整数次の場合も三角関数と密接に関係している．例えば，

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

という結果が知られている．