応用解析学（電子２年）　　第15講

- ルジャンドル方程式とルジャンドル多項式
- ３次元球領域の熱伝導方程式の初期値境界値問題
- まとめ
- 期末試験解説はMoodleの「応用解析学」コースに後日置く.（万一ある場合は）再試に関する情報もそこに載せる.

24. Legendre 方程式と Legendre 多項式・Legendre 関数

次章で，３次元の熱伝導方程式の球領域での初期値境界値問題を，変数分離法によって，各変数毎の常微分方程式に帰着するが，準備として，そこで現れるルジャンドル陪微分方程式とその解であるルジャンドル関数を調べる.

まず，n-次の「**Legendre（ルジャンドル）方程式**」（$n = 0, 1, 2, \ldots$）とは，

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}(x)\right) + n(n+1)P(x) = 0, \quad (-1 < x < 1) \tag{1}$$

であり，以下で定義される n **次多項式の解** $P_n(x)$ **（n-次ルジャンドル多項式）**を持つ：$P_0(x) = 1$ に始まり，$P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$

$$\cdots, P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, \cdots$$

この $P_n(x)$ は，式 (1) を満たす多項式解の１つで，実際に微分してみれば示せる.

さらに「**ルジャンドル陪微分方程式** $(-1 < x < 1)$」$(n, m = 0, 1, \ldots,\ m \le n)$：

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}(x)\right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P(x) = 0 \tag{2}$$

の解（の１つ）である**ルジャンドル関数** $P_{n,m}(x)$ は，ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ の微分を使って表現できる（→オンライン付録）：

$$P_{n,m}(x) \overset{\text{def}}{=} (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x), \quad n, m = 0, 1, \ldots, (m \le n) \tag{3}$$

ルジャンドル関数の直交性

1. まず，微分形： $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$.

計算：この等式は，右辺を２項展開して微分をひたすら計算すれば叶う.

2. そこで，$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$ が成り立ち，

$\displaystyle\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x) | n = 0, 1, \ldots\}$ は $[-1, 1]$ での二乗可積分関数の正規直交系.

計算：滑らかな関数 f, g とそれらの導関数 f', g' に対し，部分積分より以下の対称関係を得る．積分区間の端（$x = -1, 1$）で $1 - x^2 = 0$ に注意.

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}((1-x^2)f'(x))'g(x)dx &= \Big[(1-x^2)f'(x)g(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'(x)g'(x)dx \\
&= 0 - \Big[(1-x^2)f(x)g'(x)\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}((1-x^2)g'(x))'f(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1}((1-x^2)g'(x))'f(x)dx
\end{aligned}
$$

式 (1) より，$((1-x^2)P_n(x)')' = -n(n+1)P_n(x)$ なので，$f = P_n, g = P_m$ と置き，上の対称関係を利用すると，

$$
-n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1}((1-x^2)P_n'(x))'P_m(x)dx
$$

$$
= \int_{-1}^{1}((1-x^2)P_m'(x))'P_n(x)dx = -m(m+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx
$$

より，$\displaystyle(m(m+1) - n(n+1))\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0$．よって，

- $n \neq m$ なら，$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0.$

一方，$[-1, 1]$ で滑らかなで両端で 0 になる関数 f に対して，以下の関係を得る.

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n f}{dx^n}(x)\right)^2 dx &= \left[\frac{d^n f}{dx^n}(x)\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x)\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(x)dx \\
&= -\left[\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(x)\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{d^{n+2} f}{dx^{n+2}}(x)\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}}(x)dx \\
&= \cdots = (-1)^n\int_{-1}^{1}\frac{d^{2n} f}{dx^{2n}}(x)f(x)dx \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ここで，$f(x) = (x^2-1)^n = (-1)^n(1+x)^n(1-x)^n$ と置くと，

- 前述の $P_n(x)$ の微分形より $\displaystyle\frac{d^n f}{dx^n}(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = 2^n n! P_n(x)$
- また，$f(x) = x^{2n} + \cdots + 1$ の形なので，$\displaystyle\frac{d^{2n} f}{dx^{2n}}(x) = (2n)!$

よって，等式 (4) を用いて，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx &= \frac{1}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n f}{dx^n}(x)\right)^2 dx = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{2n} f}{dx^{2n}}(x) f(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1} f(x) dx = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\int_{-1}^{1}(1+x)^n(1-x)^n dx\end{aligned}$$

最後にベータ関数の計算（第８講）を利用すると，実数 $a<b$ に対して，

$$\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1} dx = \frac{(b-a)^{p+q-1}\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

なので，

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\cdot\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$

3. 最終的に，$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_{n,m}(x) P_{l,m}(x) dx = \begin{cases} 0 & l \neq n \\ \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & l = n,\ m = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$

   これは,（原理的には）上と同様の方針で

   $$P_{n,m}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(1-x^2)^n$$

   を利用して計算する．

25．３次元空間での初期値境界値問題

３次元の球領域の熱伝導方程式の初期値境界値問題

原点中心・半径 $a(>0)$ の球面内部の，時刻 0 での初期温度分布が与えられた場合の，温度変化を考える．ただし，球面（恒温境界）上では温度 0 に保たれる．時刻 t 位置 (x,y,z) での温度を未知関数 $u(t,x,y,z)$，初期温度分布を既知関数 $f(x,y,z)$ とする．

空間領域とその境界：

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}, \quad \partial D \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 = a^2\}$$

を定義する．また，$f(x,y,z)$ は 十分滑らか（十分な回数連続微分可能）とする．

$u(t,x,y,z)$ として，$(t,x,y,z) \in [0,\infty) \times D$ で連続で，その内部では滑らかで，以下を満すものを探す．

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y,z) = \Delta u(t,x,y,z) \quad &\text{for} \quad t>0, (x,y,z) \in D \setminus \partial D \\ u(t,x,y,z) = 0 \quad &\text{for} \quad t \geq 0, (x,y,z) \in \partial D \\ u(0,x,y,z) = f(x,y,z) \quad &\text{for} \quad (x,y,z) \in D\end{aligned}$$

3次元極座標に変換：$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{cases}$,　$0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le r$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \theta = \mathrm{Atan}(z, \sqrt{x^2+y^2}),\ \phi = \mathrm{Atan}(x,y),$$

を考え，$w(r,\theta,\phi) = u(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ と置くと：

$$\Delta u(x,y,z) \ = \ w_{rr} + \frac{2}{r}w_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}w_\theta + w_{\theta\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}w_{\phi\phi}$$

となる．ただし，$w_r \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial w}{\partial r}$, $w_\theta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial w}{\partial \theta}, \ldots, w_{\phi\phi} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial^2 w}{\partial \phi^2}$ のように略記．これが**3次元極座標のラプラシアン**である（→計算はオンライン付録）

以下の「未知関数を w とする初期値境界値問題」を解けばよい．

$$w_t(t,r,\theta,\phi) = w_{rr} + \frac{2}{r}w_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}w_\theta + w_{\theta\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}w_{\phi\phi} \tag{5}$$

$$w(t,a,\theta,\phi) = 0 \tag{6}$$

$$w(t,r,\theta,0) = w(t,r,\theta,2\pi) \tag{7}$$

$$w(0,r,\theta,\phi) = g(r,\theta,\phi) \tag{8}$$

ただし，$f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) = g(r,\theta,\phi)$ と置いた．

いつものように「変数分離法」によってこの解を求めるために，

$$w(t,r,\theta,\phi) = T(t)R(r)H(\theta)\Phi(\phi),\ T(t) \ne 0, R(r) \ne 0, H(\theta) \ne 0, \Phi(\phi) \ne 0$$

のような形で，(5) & (6) & (7) を満す解を仮定する．(5) より，

$$T'RH\Phi = T(R'' + \frac{2}{r}R')H\Phi + \frac{1}{r^2}TR(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}H' + H'')\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}TRH\Phi''$$

となり，特に，$T(t)R(r)H(\theta)\Phi(\phi) \ne 0$ なる点では，$TRH\Phi$ で両辺を割ると，

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{2}{r}R'\right) + \frac{1}{r^2 H\sin\theta}(\sin\theta H')' + \frac{1}{r^2\Phi\sin^2\theta}\Phi''$$

が成り立つが，

- この左辺は r,θ,ϕ に依らず，右辺は t に依らないので，結局，ある定数（$-\lambda$）．
- 右辺の第3項は ϕ に依らないので，$r^2\sin^2\theta$ 倍した $\dfrac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)}$ もある定数（$-\mu$）．
- 同様に，右辺の第2項＋第3項は θ に依らないので，r^2 倍した $\dfrac{1}{H\sin\theta}(\sin\theta H')' - \dfrac{\mu}{\sin^2\theta} =$ もある定数（$-\sigma$）．

結局，**以下の常微分方程式が導かれる**：

$$
\begin{aligned}
T'(t) + \lambda T(t) &= 0 \quad (0 < t) && (9)\\
\Phi''(\phi) + \mu \Phi(\phi) &= 0 \quad (0 \le \phi \le 2\pi),\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) && (10)\\
R''(r) + \frac{2}{r} R'(r) + \left(\lambda - \frac{\sigma}{r^2}\right) R(r) &= 0 \quad (0 < r < a),\ R(a) = 0 && (11)\\
\frac{1}{\sin\theta} (\sin\theta H')' + \left(\sigma - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right) H(\theta) &= 0 \quad (0 < \theta < \pi), && (12)
\end{aligned}
$$

- (9) は以前と同様で，$t \to \infty$ で有界な（かつ定数でない）解を持つためには，$\lambda > 0$ が必要である．この時の一般解は，

$$T(t) = be^{-\lambda t}$$

- (10) も以前と同様に，$\Phi(\phi) = c_1 \cos\sqrt{\mu}\phi + c_2 \sin\sqrt{\mu}\phi$ の境界条件 $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ より，μ が固有値：$\mu = m^2 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$ の場合にのみ，(10) が解を持ち得て，各 $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\Phi(\phi) = c_1 \cos m\phi + c_2 \sin m\phi$$

ただし，$m = 0$ の場合，Φ は定数関数.

- (12) は，新しい形の常微分方程式である．

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dH}{d\theta}\right) + \left(\sigma - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right) H(\theta) = 0,\ 0 < \theta < \pi$$

さて，$\cos\theta = \dfrac{z}{r} = \eta$ という変数変換によって，$H(\theta(\eta)) = P(\eta)$, と置くと，

$$\frac{d}{d\eta}\left((1-\eta^2)\frac{dP}{d\eta}(\eta)\right) + \left(\sigma - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right) P(\eta) = 0,\ -1 < \eta < 1$$

となるが，実は，有界な（発散しない）解を持つためには，

  - $\sigma = n(n+1) \quad (n = m, m+1, \ldots)$ が必要（証明なしに認める）で，

$$\frac{d}{d\eta}\left((1-\eta^2)\frac{dP}{d\eta}(\eta)\right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right) P(\eta) = 0 \quad (13)$$

  という方程式になる（$-1 < \eta < 1$）．

これが,「**Legendre（ルジャンドル）の陪微分方程式**」（前述）．$m = 1, 2, \ldots, n$ に対して，**ルジャンドル関数**：$P_{n,m}(\eta)$ が定義でき，それは**方程式 (13) の解になる**（前述）．よって，方程式 (12) から方程式 (13) を導いた変換の逆より，$H(\theta) = P_{n,m}(\cos\theta)$ は元の方程式 (12) を満す．ただし，$\sigma = n(n+1)$.

- (11) は，以前と同様にベッセル方程式である． $s \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda}r,\ J(s) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{s}R(\frac{s}{\sqrt{\lambda}})$ と置くと，(12) より，n が非負整数として $\sigma = n(n+1)$ なので，

$$J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + (1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{s^2})J(s) \quad = \quad 0 \tag{14}$$

  と変換できる．この微分方程式は，ベッセル関数 $J_{n+1/2}(s)$ を解に持ち，

$$R(r) = J_{n+1/2}(s)s^{-1/2} = \lambda^{-1/4}r^{-1/2}J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}r)$$

  は元の方程式 (11) を満たす.

- 以前と同様に，$R(a) = 0$ という条件は， $\lambda^{-1/4}a^{-1/2}J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}a) = 0$ を意味し， $J_{n+1/2}(s) = 0$ の正の実根を $0 < s_{n,1} < s_{n,2} < \ldots$ と置いて，λ の取りうる値（固有値）は，$\{\lambda_{n,k} = \left(\frac{s_{n,k}}{a}\right)^2 | n = 0, 1, 2, \ldots; k = 1, 2, \ldots\}$

補足：念のため上の式 (11) から式 (14) への変換を計算しておく：

$$\begin{aligned}
& J''(s) + \frac{1}{s}J'(s) + (1 - \frac{(n+1/2)^2}{s^2})J(s) \\
= \quad & -\frac{s^{-3/2}}{4}R + \frac{s^{-1/2}}{\sqrt{\lambda}}R' + \frac{s^{1/2}}{\lambda}R'' + \frac{s^{-3/2}}{2}R + \frac{s^{-1/2}}{\sqrt{\lambda}}R' + (1 - \frac{(n+1/2)^2}{s^2})s^{1/2}R \\
= \quad & \frac{s^{1/2}}{\lambda}R''(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}) + \frac{2s^{-1/2}}{\sqrt{\lambda}}R'(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}) + \left(s^{1/2} - n(n+1)s^{-3/2}\right)R(\frac{s}{\sqrt{\lambda}}) \\
= \quad & \frac{s^{1/2}}{\lambda}\left(R''(r) + \frac{2}{r}R'(r) + (\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2})R(r)\right) = 0 \quad \left(\text{ただし } r = \frac{s}{\sqrt{\lambda}}\right)
\end{aligned}$$

以上より，$n = 0, 1, \ldots; k = 1, 2, \ldots; m = 0, 1, \ldots, n$ に対して，

$$T_{k,n}(t) \overset{\text{def}}{=} \exp(-\left(\frac{s_{n,k}}{a}\right)^2 t), \quad \Phi_m(\phi) \overset{\text{def}}{=} c_m \cos m\phi + c'_m \sin m\phi,$$

$$H_{n,m}(\theta) \overset{\text{def}}{=} P_{n,m}(\cos\theta), \quad R_{k,n}(r) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{a}{s_{n,k}r}\right)^{1/2} J_{n+1/2}\left(\frac{s_{n,k}}{a}r\right)$$

として，それらの積は，(5) & (6) & (7) の解であり，斉次微分方程式重ね合わせの原理より，それらの有限個の線形和もそうである.

実はさらに（前と同様に），初期条件 (8) を満すように，適切な定数 $\{A_{k,n,m}, B_{k,n,m}\}$ を選ぶと，

$$w^*(t, r, \theta, \phi) \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \sum_{k,n,m}^{\infty} T_{k,n}(t)R_{k,n}(r)H_{n,m}(\theta)\left(A_{k,n,m}\cos m\phi + B_{k,n,m}\sin m\phi\right)$$

は，定義可能で（右辺が収束して），(5) & (6) & (7) & (8) の解になる.

- 残る目標は，$w^*(0,r,\theta,\phi)$ が $g(r,\theta,\phi)$ と一致するように，つまり，

$$g(r,\theta,\phi)=\sum_{k,n,m}^{\infty}R_{k,n}(r)H_{n,m}(\theta)\left(A_{k,n,m}\cos m\phi+B_{k,n,m}\sin m\phi\right)$$

となるように $A_{k,n,m},B_{k,n,m}$ を決める（必要条件）ことである．

そこでは，三角関数やベッセル関数の直交性に加えて，**ルジャンドル関数の直交性**（前述）を利用する：

$$\int_{-1}^{1}P_{n,m}(x)P_{n',m}(x)dx=\begin{cases}0 & n'\neq n\\ \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!} & n'=n,\ m=0,1,\dots,n\end{cases}$$

以下では，前回と同様の流れで，$A_{i,j,l}\ (i=1,2,\dots;j=0,1,\dots;l=0,1,\dots,j)$ の導出の様子を簡単に調べてみる．$B_{i,j,l}$ も全く同様に導出できる．

$$\begin{aligned}
C_l(r,\theta) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(r,\theta,\phi)\cos l\phi d\phi\\
&\qquad\text{(三角関数の直交性より, } g(r,\theta,\phi)\text{ の級数内の } m=l \text{ の項だけ残す：}\\
&\qquad\quad \cos l\phi \text{ を掛けて積分)}\\
&= \sum_{k,n,m}^{\infty}R_{k,n}(r)H_{n,m}(\theta)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(A_{k,n,m}\cos m\phi+B_{k,n,m}\sin m\phi\right)\cos l\phi d\phi\\
&= \sum_{k,n}^{\infty}A_{k,n,l}R_{k,n}(r)H_{n,l}(\theta)=\sum_{k,n}^{\infty}A_{k,n,l}R_{k,n}(r)P_{n,l}(\cos\theta)\\
C^*_{j,l}(r) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\pi}C_l(r,\theta)P_{j,l}(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\
&\qquad\text{(ルジャンドル関数の直交性より, } C_l(r,\theta)\text{ の級数内の } n=j \text{ の項だけ残す：}\\
&\qquad\quad P_{j,l}(\cos\theta)\sin\theta \text{ を掛けて積分)}\\
&= \sum_{k,n}^{\infty}A_{k,n,l}R_{k,n}(r)\int_0^{\pi}P_{n,l}(\cos\theta)P_{j,l}(\cos\theta)\sin\theta d\theta\\
&= \sum_{k,n}^{\infty}A_{k,n,l}R_{k,n}(r)\int_{-1}^{1}P_{n,l}(x)P_{j,l}(x)dx\ =\ \frac{2(j+l)!}{(2j+1)(j-l)!}\sum_{k}^{\infty}A_{k,j,l}R_{k,j}(r)\\
&= \frac{2(j+l)!}{(2j+1)(j-l)!}\sum_{k}^{\infty}A_{k,j,l}\left(\frac{s_{j,k}}{a}r\right)^{-1/2}J_{j+1/2}\left(\frac{s_{j,k}}{a}r\right)\\
C^{**}_{i,j,l} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{a}C^*_{j,l}(r)\left(\frac{s_{j,i}}{a}\right)^{1/2}r^{3/2}J_{j+1/2}\left(\frac{s_{j,i}}{a}r\right)dr\\
&\qquad\text{(ベッセル関数の直交性より, } C^*_{j,l}(r)\text{ の級数内の } k=i \text{ の項だけ残す：}\\
&\qquad\quad \left(\frac{s_{j,i}}{a}\right)^{1/2}r^{3/2}J_{j+1/2}\left(\frac{s_{j,i}}{a}r\right) \text{ を掛けて積分)}\\
&= \frac{2(j+l)!}{(2j+1)(j-l)!}\sum_{k}^{\infty}A_{k,j,l}\left(\frac{s_{j,i}}{s_{j,k}}\right)^{1/2}\int_0^{a}rJ_{j+1/2}\left(\frac{s_{j,k}}{a}r\right)J_{j+1/2}\left(\frac{s_{j,i}}{a}r\right)dr\\
&= \frac{2(j+l)!}{(2j+1)(j-l)!}A_{i,j,l}\int_0^{a}r\left(J_{j+1/2}\left(\frac{s_{j,i}}{a}r\right)\right)^2dr
\end{aligned}$$

よって，$A_{i,j,l} = C^{**}_{i,j,l}\left(\frac{2(j+l)!}{(2j+1)(j-l)!}\int_0^a r\left(J_{j+1/2}\left(\frac{s_{j,i}}{a}r\right)\right)^2 dr\right)^{-1}$

26. まとめ

本講義で学んだことは，大別すると，

- 実数の世界での**微分，積分，級数関数（一般には関数列の極限）の復習，それらの交換可能性や特殊関数等の補足**.
  - 不定積分の計算（有理関数，無理関数）と逆三角関数
  - テーラー級数展開，重積分と座標変換，ガンマ関数・ベータ関数（積分によって表現された関数の例）
  - 級数によって表現された関数の連続性；微分可能性；積分可能性
  - 積分によって表現された関数の連続性；微分可能性；積分可能性

  ただし，厳密な定義なしにリーマン積分に代えてルベーグ積分を導入し,「積分と｛極限，微分，積分｝との順序交換」に，**ルベーグの収束定理やフビニの定理**を利用した.

  これらはすべての解析学の基礎であり，確率論をはじめとする応用に必須である．また，特殊関数としての**ガンマ関数**は,「階乗」が「べき乗」や「指数」と同様に自然界の中の数学的実質であることを示している.

- **実フーリエ級数と２階線形偏微分方程式**の基礎．フーリエ級数の（ルベーグ積分の世界での）本質である**完全正規直交系**を，出来る範囲で厳密に調べ,それをベースに，古典物理学で現れる線形２階の熱伝導方程式，波動方程式,ラプラス方程式の，初期値境界値問題の簡単な例を変数分離法で解き，解の一意性も示した．三角関数，ベッセル関数，ルジャンドル関数のような完全正規直交系の存在がキーとなる.
  - フーリエ級数展開と完全正規直交系
  - 熱伝導（放物型），波動（双曲型），ラプラス（楕円型）方程式
  - １次元，２次元，３次元での初期値境界値問題
  - ベッセル関数，ルジャンドル多項式，ルジャンドル関数

  もちろん古典物理学だけではなく，むしろ量子力学（電子は原子核の周りの波としても扱われる）において，これらの手法が活躍する．後に現代物理で「**シュレディンガー方程式**」や「**球面調和関数**」などを学ぶ時に，本講義で３次元空間での線形２階偏微分方程式を学んでおいたことが役に立つはず.

オンライン付録

A-1. Legendre 関数が Legendre 陪微分方程式を満たすことの証明

式 (3) が式 (2) を満たすことを示す.

関数 f の k 回導関数： $\dfrac{d^k f}{dx^k}(x)$ を $f^{(k)}(x)$ と略記し，積の微分を繰り返せば,

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(f(x)g(x)\right) = \sum_{j=0}^{m+1} {}_{m+1}C_j f^{(j)}(x) g^{(m+1-j)}(x)$$

が成り立つ．$f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = P_n^{(1)}(x)$, $(1-x^2)^{(j)} = 0 \quad (j = 3, 4, \ldots)$ より,

$$\begin{aligned} & \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left((1-x^2)P_n^{(1)}(x)\right) = \sum_{j=0}^{2} {}_{m+1}C_j (1-x^2)^{(j)} P_n^{(m+2-j)}(x) \\ = \ & (1-x^2)P_n^{(m+2)}(x) - 2x(m+1)P_n^{(m+1)}(x) - m(m+1)P_n^{(m)}(x) \end{aligned}$$

そこで，この変形を用いて，式 (1) の**両辺を** m **回微分（**$m \leq n$**）する**と

$$\begin{aligned} & \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left((1-x^2)P_n^{(1)}(x)\right) + n(n+1)P_n^{(m)}(x) \\ = \ & (1-x^2)P_n^{(m+2)}(x) - 2x(m+1)P_n^{(m+1)}(x) + (n(n+1) - m(m+1))P_n^{(m)}(x) \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{15}$$

一方， $u(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1-x^2)^{m/2} P_n^{(m)}(x)$ と置き，導関数，２階導関数を $u'(x)$, $u''(x)$ として,

$$u'(x) = (1-x^2)^{m/2}\left(\frac{-mx}{1-x^2}P_n^{(m)}(x) + P_n^{(m+1)}(x)\right)$$

$$u''(x) = (1-x^2)^{m/2}\left(\left(\frac{-m}{1-x^2} + \frac{m(m-2)x^2}{(1-x^2)^2}\right)P_n^{(m)}(x) - \frac{2mx}{1-x^2}P_n^{(m+1)}(x) + P_n^{(m+2)}(x)\right)$$

より，方程式 (2) に対応する次式が 0 になることを直接計算できる.

$$((1-x^2)u')' + (n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2})u = (1-x^2)u'' - 2xu' + (n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2})u$$

先に計算した u, u', u'' を，上の式の右辺に代入し， $(1-x^2)^{m/2}$ で割ると,

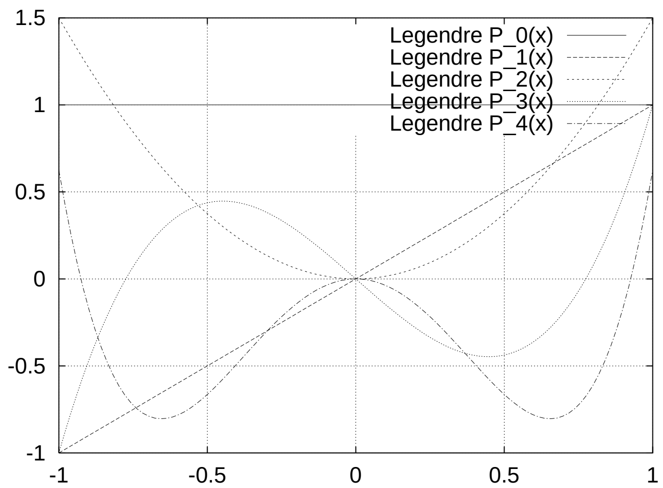
$$\begin{aligned} & (1-x^2)P_n^{(m+2)}(x) - 2x(m+1)P_n^{(m+1)}(x) \\ & + \left(n(n+1) - m + \frac{m(m-2)x^2 + 2mx^2 - m^2}{1-x^2}\right)P_n^{(m)}(x) \\ = \ & (1-x^2)P_n^{(m+2)}(x) - 2x(m+1)P_n^{(m+1)}(x) + (n(n+1) - m(m+1))P_n^{(m)}(x) \\ = \ & 0 \qquad \text{（式 (15) より）} \end{aligned}$$

A-2. シュミットの直交化によるルジャンドル多項式系の生成

ルジャンドル方程式：

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}(x)\right)+n(n+1)P(x)=0, \quad -1<x<1$$

の多項式解としてのルジャンドル多項式系 $\{P_1(x), P_2(x), P_3(x), \ldots\}$ を考える．



一次独立な多項式 $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ の無限列に対して，

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad ||f|| = \sqrt{< f, f >}$$

で内積とノルムを定義した無限次元ベクトル空間上の**シュミットの正規直交化**操作を施して，形式的に多項式による正規直交系を生成すると，上記のルジャンドル多項式系と一致する.「シュミットの正規直交化」は１年生の線形代数参照.

実際，多項式系 $\{f_i(x) = x^i | i = 0, 1, 2, \ldots\}$ をベクトル列とみて，

$$\phi_0(x) = \frac{f_0(x)}{||f_0||}, \quad \phi_n(x) = \frac{f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} < f_n, \phi_i > \phi_i(x)}{||f_n - \sum_{i=0}^{n-1} < f_n, \phi_i > \phi_i||}$$

によって，$\phi_n(x)$ を作っていくと，$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ となる．すなわち，

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \phi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \phi_2(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}, \ldots$$

A-3. ３次元極座標のラプラシアン

３次元極座標のラプラシアンの導出は，２次元の場合同様に，ひたすら合成関数の偏微分を計算すればよい．本来は，左辺（直交座標のラプラシアン）から右

辺を導くべきであるが，その計算に必要な $\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$ などが綺麗な形でないので，簡単のために，逆方向を示す．つまり，極座標のラプラシアンを知っているとして，等式を証明する．

ただし，２次元の場合と同様に，上の $\phi = \mathrm{Atan}(x, y)$ は，$\tan\phi = \dfrac{y}{x}$ の逆関数として，x, y の正負（４通り）によって，$0 \le \phi \le 2\pi$ を４つの領域に分割し，ϕ を対応させるものとする．すなわち，$x \ge 0, y \ge 0 \leftrightarrow 0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{2}$，$x \le 0, y \ge 0 \leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} \le \phi \le \pi$，$x \le 0, y \le 0 \leftrightarrow \pi \le \phi \le \dfrac{3\pi}{2}$，$x \ge 0, y \le 0 \leftrightarrow \dfrac{3\pi}{2} \le \phi \le 2\pi$．

$\theta = \mathrm{Atan}(z, \sqrt{x^2 + y^2})$ も同様.

具体的には，等式の両辺を (r, θ, ϕ) の関数と見て，右辺を計算して，左辺を導く．そこで，x, y, z を (r, θ, ϕ) で偏微分すると，

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\phi,\ \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\phi,\ \frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} = -r\sin\theta\cos\phi, \ldots \frac{\partial z}{\partial\theta} = -r\sin\theta,\ \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} = -r\cos\theta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial\phi} = -r\sin\theta\sin\phi,\ \frac{\partial^2 x}{\partial\phi^2} = -r\sin\theta\cos\phi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\phi} = r\sin\theta\cos\phi,\ \frac{\partial^2 y}{\partial\phi^2} = -r\sin\theta\sin\phi,\ \frac{\partial z}{\partial\phi} = 0$$

$u_x \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial u}{\partial x},\ u_y \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial u}{\partial y}, \ldots, u_{xx} \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u_{xy} \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \ldots$ のように略記すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= u_x\frac{\partial x}{\partial r} + u_y\frac{\partial y}{\partial r} + u_z\frac{\partial z}{\partial r}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \left(u_{xx}\frac{\partial x}{\partial r} + u_{xy}\frac{\partial y}{\partial r} + u_{xz}\frac{\partial z}{\partial r}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \ldots + \left(u_{zx}\frac{\partial x}{\partial r} + u_{zy}\frac{\partial y}{\partial r} + u_{zz}\frac{\partial z}{\partial r}\right)\frac{\partial z}{\partial r} \\
\frac{\partial w}{\partial\theta} &= u_x\frac{\partial x}{\partial\theta} + u_y\frac{\partial y}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial z}{\partial\theta}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} &= \left(u_{xx}\frac{\partial x}{\partial\theta} + u_{xy}\frac{\partial y}{\partial\theta} + u_{xz}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\frac{\partial x}{\partial\theta} + u_x\frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} + \ldots
\end{aligned}$$

と書け，$\dfrac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi$ などの計算結果を入れて，順番を整理し，

$$w_{rr} + \frac{2}{r}w_r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}w_\theta + w_{\theta\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}w_{\phi\phi} = \sum_{p,q\in\{x,y,z\}} A_{pq}u_{pq} + \sum_{p\in\{x,y,z\}} B_p u_p$$

$$A_{xx}(r, \theta, \phi) = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin^2\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \\
A_{xy}(r,\theta,\phi) &= 2\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right) \\
&= 2\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + 2\cos^2\theta\cos\phi\sin\phi - 2\cos\phi\sin\phi = 0
\end{aligned}
$$

のように順に計算していくと，実は，A_{pq}, B_p はすべて定数で，$A_{xx} = A_{yy} = A_{zz} = 1$ で他はすべて 0 になることが確認できる．